Corso di ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

Foglio di esercizi n. 1

1. Si dimostri il seguente risultato (che generalizza il Lemma di Study):
Sia K un campo algebricamente chiuso e siano $f, g \in K[x_1, \ldots, x_r]$, dove f è minimo. Se $V(f) \subseteq V(g)$ allora f divide g.

2. Sia K un campo algebricamente chiuso e siano $f_1, f_2 \in K[x_1, \ldots, x_r]$. Si dimostri che $V(f_1) = V(f_2)$ se e solo se vale la seguente condizione per ogni polinomio irriducibile $h \in K[x_1, \ldots, x_r]$:

$$h \mid f_1 \Leftrightarrow h \mid f_2 .$$

In particolare, se f_1 non è costante e $f_1 = h_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot h_k^{m_k}$, con h_i polinomio irriducibile di grado > 0 e $m_i > 0$ per ogni $\forall i = 1, \ldots, k$, allora $V(f_1) = V(f_2)$ se e solo se esistono $n_1, \ldots, n_k > 0$ tali che $f_2 = \lambda h_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot h_k^{n_k}$, per qualche $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

3. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ una curva algebrica affine piana. Si provi che $\mathcal{C}$ ha infiniti punti.

4. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^2$ un sottoinsieme non vuoto e compatto rispetto alla topologia euclidea di $\mathbb{C}^2$ (cioè identificando topologicamente $\mathbb{C}^2$ con $\mathbb{R}^4$). Si dimostri che $\mathcal{C}$ non è una curva algebrica affine.

5.

(i) Sia $\mathcal{C} = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ una curva algebrica affine piana. Una *funzione regolare su* $\mathcal{C}$ è una funzione $F\colon \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ del tipo $F = g_{|\mathcal{C}}$, dove $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ e $g_{|\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ è la restrizione di g (vista come funzione $g\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$) a $\mathcal{C}$. L'insieme delle funzioni polinomiali su $\mathcal{C}$ si denota con $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$.

Si dimostri che $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ è una $\mathbb{C}$-algebra isomorfa a $\frac{\mathbb{C}[x_1,x_2]}{I(\mathcal{C})}$, dove $I(\mathcal{C}) = \{g\colon \mathbb{C}^2 \mid g(a,b) = 0 \,, \forall\, (a,b) \in \mathcal{C}\}$ è l'ideale dei polinomi che si annullano su $\mathcal{C}$.

(ii) Siano $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ due curve algebriche affini piane. Un *morfismo* da $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ è una funzione $\Phi\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ tale che

$$\Phi(a,b) = (g_1(a,b), g_2(a,b)) \,, \quad \forall\, (a,b) \in \mathcal{C}_1 \,,$$

per qualche $g_1, g_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$.

Si osservi che, in tale caso, l'applicazione $\Phi^*\colon \mathbb{C}[\mathcal{C}_2] \to \mathbb{C}[\mathcal{C}_1]$ definita come $\Phi^*(g) = g \circ \Phi$ è un morfismo di $\mathbb{C}$-algebre.
Viceversa si dimostri che, per ogni morfismo di $\mathbb{C}$-algebre $\varphi\colon \mathbb{C}[\mathcal{C}_2] \to \mathbb{C}[\mathcal{C}_1]$, eiste un unico morfismo $\Phi\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ tale che $\varphi = \Phi^*$.