

Geometria delle Masse

(con approfondimenti)

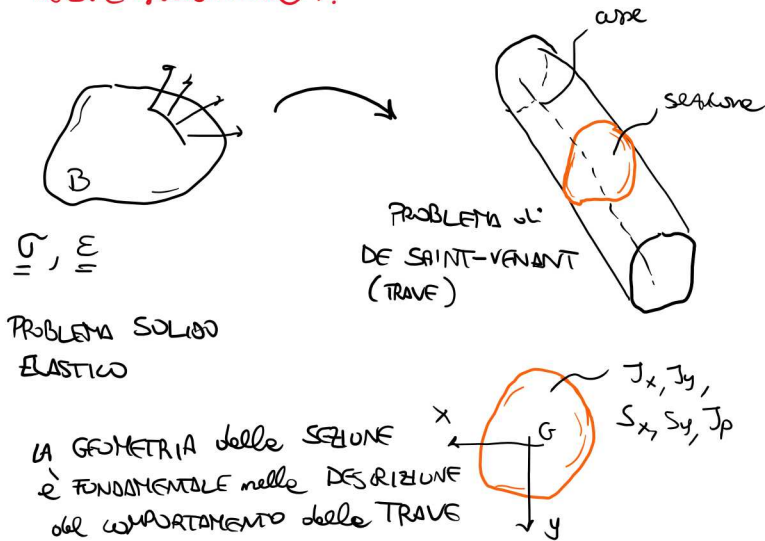
Marco Rossi

GEOMETRIA DELLE MASSE

(MARCO.ROSSI@dia.units.it)

- * BARICENTRO
- * MOMENTO STATICO
- * MOMENTO D'INERZIA
- * POLARITÀ e ANTIPOLARITÀ
- * ELLISSE D'INERZIA
- * NOCCIOLO CENTRALE D'INERZIA

Perché studiarla??



MASSA: PROPRIETÀ della MATERIA, descritta da un SCALARE

→ I CONCETTI STUDIATI QUI SI POSSONO ESTENDERE A QUALSIASI QUANTITÀ SCALARE

SISTEMI FISICI

- MASSA CONCENTRATA (discreti)
- MASSA DISTRIBUITA (continui)
 - LINEA
 - SUPERFICIE
 - VOLUME

$$\rho_L(s) = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta s} \left[\frac{1}{m} \right]$$

DENSITÀ LINEARE

$$m = \int_{\gamma} \rho_L(s) ds$$

$$\rho_S(x, y) = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta A}$$

DENSITÀ SUPERFICIALE

$$m = \int_{\Omega} \rho_S dA$$

SISTEMA OMOGENEO

DENSITÀ di MASSA NON DIPENDE dalle POSIZIONI

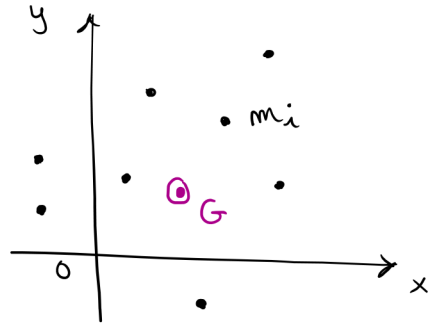
$$\rho_L = \text{cost}, \rho_S = \text{cost}$$

QUELLO CHE DIVENTA IMPORTANTE È SOLO LA DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

$$(\rho_S = 1, \rho_L = 1) \rightarrow$$

GEOMETRIA delle AREE

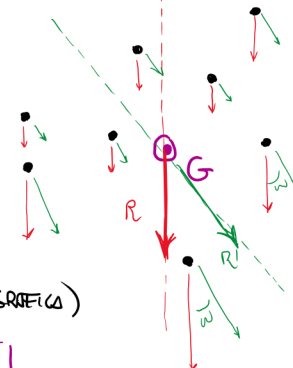
SISTEMI DI MASSE CONCENTRATE



(DEF. ANALITICA)

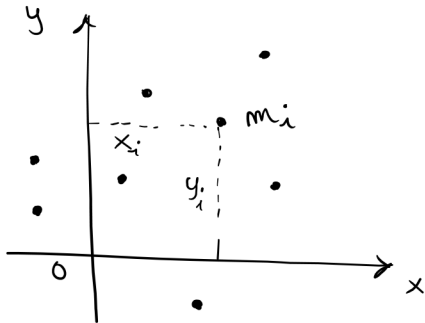
$$G - O = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

(DEF. GRAFICA)



È UN PUNTO FISICO NELLO SPAZIO!!

MOMENTO STATICO (1° ordine)



$$S_x = \sum_{i=1}^N m_i y_i$$

$$S_y = \sum_{i=1}^N m_i x_i$$

MOM. STATICO
- rispetto -
ASSE X

MOM. STATICO
- rispetto -
ASSE Y

i) SIA POSITIVO, SIA NEGATIVO

ii) SE OMogeneo (m = 1) $S_x = \sum_{i=1}^N y_i$, $S_y = \sum_{i=1}^N x_i$

BARICENTRO: È IL CENTRO DEL SISTEMA DI VETTORI PARALLELI DI INTENSITÀ PROP. alle MASSE

dalle definizioni di BARICENTRO

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

MASSA TOTALE

$$x_G = \frac{S_y}{M}, \quad y_G = \frac{S_x}{M}$$

LEGAME TRA MOMENTO STATICO E COORDINATE DEL BARICENTRO

Th di VARIGENON: IL MOMENTO STATICO DI UN SISTEMA DI MASSE m_i EQUIVALE AL MOMENTO STATICO DI UNA SINGOLA MASSA M TOTALE CONCENTRATA NEL BARICENTRO

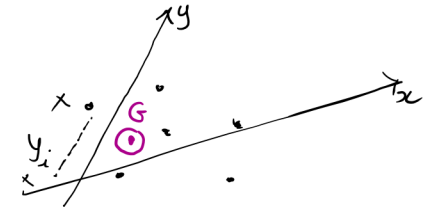
$$S_x = M \cdot y_G, \quad S_y = M \cdot x_G$$

DEFINIZIONE "ALTERNATIVA" DI BARICENTRO

→ PUNTO TALE PER CUI, SE SI CONCENTRA IN ESSO TUTTA LA MASSA DEL SISTEMA, NON CAMBIA IL MOMENTO STATICO COMPLESSIVO

OSSERVAZIONI:

i) IL CONCETTO DI MOMENTO STATICO È PIÙ GENERALE DI QUESTI



ii) MOMENTO STATICO Nullo

⇔ ASSE CONSIDERATO È BARICENTRALE $S_x = 0 \Rightarrow y_G = 0$ BARICENTRO

iii) ENTRAMBI I MOMENTI STATICI NULLI

⇔ SIST. DI RIFERIMENTO È BARICENTRALE

15) ESTENSIONE AI CORPI CONTINUI (PURI)

$$S_x = \int_{\Omega} y \, dA, \quad S_y = \int_{\Omega} x \, dA$$

$$x_G = \frac{\int_{\Omega} x \, dA}{\int_{\Omega} dA} = \frac{S_y}{M}, \quad y_G = \frac{\int_{\Omega} y \, dA}{\int_{\Omega} dA} = \frac{S_x}{M}$$

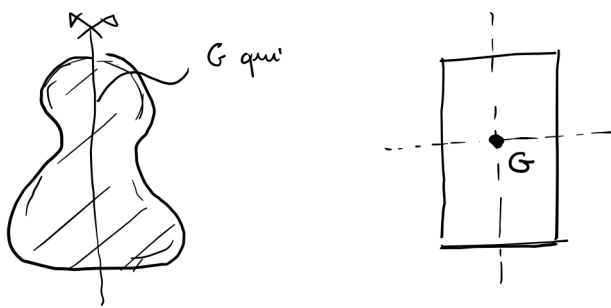
se il corpo è OMOGENEO

$$x_G = \frac{\int_{\Omega} x \, dA}{\int_{\Omega} dA} = \frac{1}{A} \int_{\Omega} x \, dA \rightarrow \text{EQUIVALE A PORRE } \rho=1$$

↓
GEOMETRIA DELL'AREA

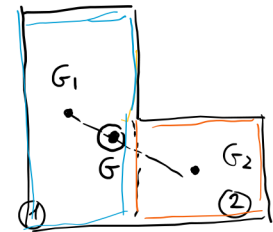
16) FIGURE OMOGENEE SIMMETRICHE HANNO BARICENTRO SULL'ASSE DI SIMMETRIA

↓
SE PIÙ DI UN ASSE DI SIMMETRIA, BARICENTRO È NELL'INTERSEZIONE



17) VALE PRINCIPIO DI ADDITTIVITÀ DEL MOMENTO STATICO

$$S_x = \int_{\Omega} y \, dA = \int_{\Omega_1} y \, dA + \int_{\Omega_2} y \, dA = S_{x1} + S_{x2} = y_{G1} A_1 + y_{G2} A_2$$



Quindi quando il corpo è fatto da più parti

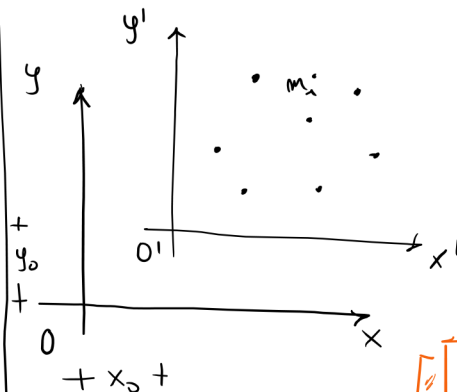
molto utile per trattare figure composte o con fori

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_{G1} A_1 + x_{G2} A_2}{A} \\ y_G = \frac{y_{G1} A_1 + y_{G2} A_2}{A} \end{cases}$$



CAMBIO SISTEMA DI RIFERIMENTO:

- BARICENTRO → è un punto fisso nel piano,
- MOM. STATICO → è una quantità scalare, dipende dal sistema di riferimento



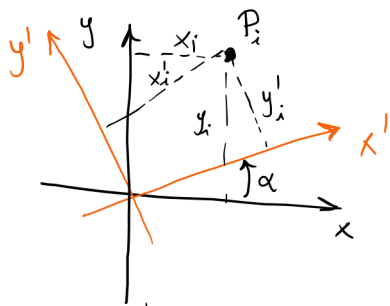
TRASLATIONE DEL SOST. DI RIFERIMENTO

$$\begin{cases} x_i = x'_i + x_0 \\ y_i = y'_i + y_0 \end{cases}$$

$$S_x = \sum_{i=1}^N m_i y_i = \sum_{i=1}^N m_i (y'_i + y_0) = y_0 \sum_{i=1}^N m_i + \sum_{i=1}^N m_i y'_i = y_0 M + S'_x$$

$$S'_x = S_x - y_0 M, \quad S'_y = S_y - x_0 M$$

ROTAZIONE degli ASSI



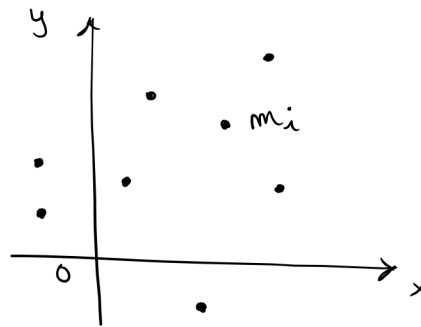
$$\begin{cases} x'_i = x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha \\ y'_i = -x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = R \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} S'_x &= \sum_{i=1}^N m_i y'_i = \sum_{i=1}^N m_i (-x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha) = \\ &= -\sin \alpha \underbrace{\sum m_i x_i}_{S_y} + \cos \alpha \underbrace{\sum m_i y_i}_{S_x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} S'_y = S_y \cos \alpha + S_x \sin \alpha \\ S'_x = -S_y \sin \alpha + S_x \cos \alpha \end{cases}$$

MOMENTI D'INERZIA (2° outline)



$$J_x = \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 \quad \text{— MOMENTO D'INERZIA rispetto all'ASSE x —}$$

$$J_y = \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 \quad \text{— MOMENTO D'INERZIA rispetto all'ASSE y —}$$

SONO QUANTITÀ SEMPRE POSITIVE!!!

— MOMENTO CENTRIFUGO —

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \quad \rightarrow \text{PUO' ESSERE SIA POSITIVO SIA NEGATIVO}$$

— RAGGIO D'INERZIA —
(o GIRATORE D'INERZIA)

$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{M}}$$

$$J_x = \rho_x^2 M \quad J_y = \rho_y^2 M$$

DISTANZA degli ASSI in cui CONCENTRARE LA MASSA TOTALE M PER AVERE INALTERATO IL MOMENTO D'INERZIA

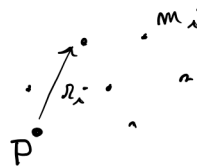
ESTENSIONE dell'AREA:

$$J_x = \int y^2 dA, \quad J_y = \int x^2 dA, \quad J_{xy} = \int xy dA$$

$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}, \quad \rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

— MOMENTO D'INERZIA POLARE —

Al posto di un asse, fissa un polo P

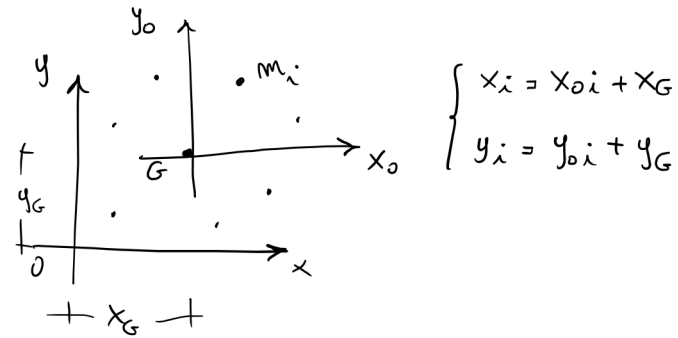


$$J_p = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

Ma in un SISTEMA di RIFERIMENTO CARTESIANO CENTRATO in P $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$

$$J_p = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_x + J_y$$

STUDIAMO COSA SUCCEDERÀ CAMBIANDO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO (= gli assi)



$$\begin{cases} x_i = x_{0i} + x_G \\ y_i = y_{0i} + y_G \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J_x &= \sum m_i y_i^2 = \sum m_i (y_{0i} + y_G)^2 = \sum m_i (y_{0i}^2 + 2y_{0i}y_G + y_G^2) = \\ &= \underbrace{\sum m_i y_{0i}^2}_{J_{x0}} + 2y_G \underbrace{\sum m_i y_{0i}}_{S_{x0}=0} + y_G^2 \underbrace{\sum m_i}_{y_G^2 M} \end{aligned}$$

(BARICENTRALE)

Th del TRASPORTO (HUYGENS)

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x0} + y_G^2 M \\ J_y &= J_{y0} + x_G^2 M \end{aligned}$$

in termini di raggi

$$\begin{aligned} R_x^2 &= R_{x0}^2 + y_G^2 \\ R_y^2 &= R_{y0}^2 + x_G^2 \end{aligned}$$

N.B.: SICCOME LA QUANTITÀ AGGIUNTA

$y_G^2 M$ È SEMPRE POSITIVA, IL MOMENTO CALCOLATO RISPETTO ad UN ASSE BARICENTRICO

È MINORE RISPETTO A QUALSIASI ASSE NON BARICENTRICO

TRASPORTO del MOMENTO CENTRIFUGO

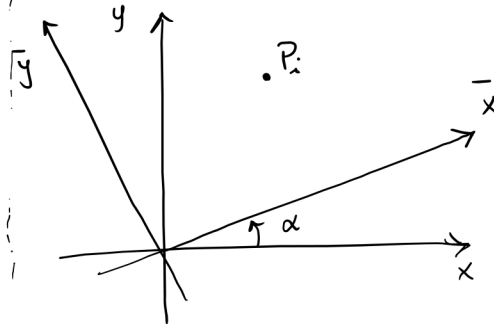
$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum m_i x_i y_i = \sum m_i (x_{0i} + x_G)(y_{0i} + y_G) = \\ &= \underbrace{\sum m_i x_{0i} y_{0i}}_{J_{x0y0}} + x_G \underbrace{\sum m_i y_{0i}}_{S_{x0}=0} + y_G \underbrace{\sum m_i x_{0i}}_{S_{y0}=0} + x_G y_G \underbrace{\sum m_i}_M \end{aligned}$$

$$J_{xy} = J_{x0y0} + M x_G y_G$$

Per estensione, IL TRASPORTO TRA DUE RETTE NON BARICENTRICHE È:

$$\begin{aligned} J'_x &= J_{x0} + M y_G'^2 \\ J''_x &= J_{x0} + M y_G''^2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} J'_x &= J''_x + M (y_G'^2 - y_G''^2) \end{aligned} \right.$$

ROTATION degli ASSI



ROTATION: $\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = R \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ \bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J_{\bar{x}} &= \sum_{i=1}^n m_i \bar{y}_i^2 = \sum m_i (-x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha)^2 = \\ &= \sum m_i \{ x_i^2 \sin^2 \alpha + y_i^2 \cos^2 \alpha - 2x_i y_i \sin \alpha \cos \alpha \} = \\ &= \underbrace{\left(\sum m_i x_i^2 \right) \sin^2 \alpha}_{J_y} + \underbrace{\left(\sum m_i y_i^2 \right) \cos^2 \alpha}_{J_x} - \underbrace{\left(\sum m_i x_i y_i \right) 2 \sin \alpha \cos \alpha}_{J_{xy}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\bar{xy}} &= \sum m_i (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) (-x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha) = \\ &= -\sin \alpha \cos \alpha \underbrace{\sum m_i x_i^2}_{J_y} + \sin \alpha \cos \alpha \underbrace{\sum m_i y_i^2}_{J_x} + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \underbrace{\sum m_i x_i y_i}_{J_{xy}} \end{aligned}$$

RISULTO ALLA FINE

$$J_{\bar{x}} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$J_{\bar{y}} = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$J_{\bar{xy}} = (J_x - J_y) \sin \alpha \cos \alpha + J_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

FORMULE

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Duplicazione

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

$$J_{\bar{x}} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{(J_x - J_y)}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{\bar{y}} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{(J_x - J_y)}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha$$

$$J_{\bar{xy}} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha$$

DOMANDA: esiste un valore α_0 t.c. si ha MASSIMO (o MINIMO) $J_{\bar{x}}$?

$$\frac{\partial J_{\bar{x}}}{\partial \alpha} = -2 \frac{(J_x - J_y)}{2} \sin(2\alpha) - 2 J_{xy} \sin 2\alpha = 0$$

$$-(J_x - J_y) \sin 2\alpha - 2 J_{xy} \sin 2\alpha = 0 \rightarrow \boxed{\tan(2\alpha_0) = -\frac{2 J_{xy}}{J_x - J_y}}$$

$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{2 J_{xy}}{J_x - J_y}\right) + \left(\frac{k\pi}{2}\right)$ PERIODICITÀ di $\frac{\pi}{2}$ NELL'ANGOLO,
QUINDI SI SCEGLIE $\alpha_0 \in \left(-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right)$

Se invece chiediamo $\frac{\partial J_{\bar{y}}}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow$ STESSO RISULTATO

$\alpha = \alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{2 J_{xy}}{J_x - J_y}\right) \rightarrow$ MASSIMO e MINIMO di $J_{\bar{x}}$ e $J_{\bar{y}}$

PER CAPIRE SE SI STA CONSIDERANDO UN MASSIMO O UN MINIMO DI $J_{\bar{x}}$ SI CONSIDERA LA DERIVATA 2^a

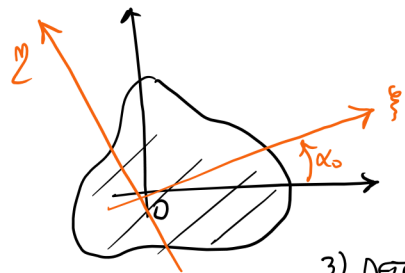
$$\frac{\partial^2 J_{\bar{x}}}{\partial \alpha^2} = -2(J_x - J_y) \cos(2\alpha) + 4J_{xy} \sin(2\alpha)$$

CALCOLO LA DERIVATA SECONDA NEL PUNTO STATIONARIO
($\alpha = \alpha_0$)

$$\frac{\partial^2 J_{\bar{x}}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha_0} = - \frac{2 \cos(2\alpha_0)}{J_x - J_y} \underbrace{\left\{ (J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2 \right\}}_{\geq 0}$$

- $J_x - J_y > 0 \rightarrow \frac{\partial^2 J_{\bar{x}}}{\partial \alpha^2} < 0 \rightarrow$ MASSIMO di $J_{\bar{x}}$ (MINIMO di $J_{\bar{y}}$)
- $J_x - J_y < 0 \rightarrow \frac{\partial^2 J_{\bar{x}}}{\partial \alpha^2} > 0 \rightarrow$ MINIMO di $J_{\bar{x}}$ (MASSIMO di $J_{\bar{y}}$)

OPERATIVAMENTE:



1) METTERE IN UN SISTEMA "GIRO" E CALCOLO

J_x, J_y, J_{xy}

2) CALCOLO α_0 $\tan(2\alpha_0) = - \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$

3) DETERMINO ASSI $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ t.c. $\begin{cases} J_{\bar{z}_1} \text{ M.I. MASSIMO} \\ J_{\bar{z}_2} \text{ M.I. MINIMO} \end{cases}$

SISTEMA $O\bar{z}_1\bar{z}_2 \rightarrow$ SISTEMA PRINCIPALE D'INERZIA

SE IL SISTEMA È CENTRATO NEL BARICENTRO $G\bar{z}_1\bar{z}_2$

SISTEMA CENTRALE D'INERZIA

SISTEMA BARICENTRALE CON $J_{\bar{z}_1}, J_{\bar{z}_2}$ MASSIMO E MINIMO

N.B. NEL PROBLEMA DI SAINT-VENANT, SI CONSIDERA SETTORE LA SEZIONE NEL SISTEMA CENTRALE D'INERZIA, È IMPORTANTE!!

Quanto vale il MOMENTO CENTRIFUGO nel SISTEMA PRINCIPALE?

$$J_{\bar{x}\bar{y}} = J_{\bar{z}_1\bar{z}_2} = \cos(2\alpha_0) \left\{ \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \tan(2\alpha_0) + J_{xy} \right\} = \cos(2\alpha_0) \left\{ - \frac{(J_x - J_y)}{2} \cdot \frac{2J_{xy}}{(J_x - J_y)} + J_{xy} \right\} = 0$$

NEL SISTEMA PRINCIPALE IL MOMENTO CENTRIFUGO È NULLO

POSSO CALCOLORE ESPPLICITAMENTE I VALORI di $J_{\bar{z}_1}, J_{\bar{z}_2}$

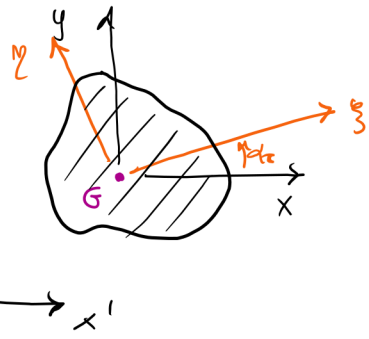
$$J_{\bar{z}_1\bar{z}_2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \cos(2\alpha_0) \left\{ \frac{J_x - J_y}{2} - J_{xy} \tan(2\alpha_0) \right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \cos(2\alpha_0) \cdot \frac{2}{J_x - J_y} \left\{ \left(\frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2 \right\}$$

$$\text{ma } \cos(2\alpha) = \pm \sqrt{\frac{1}{\tan^2(2\alpha) + 1}}$$

QUINDI ...

$$J_{\bar{z}_1\bar{z}_2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2}$$

OPERATIVAMENTE:



1) PARTO da un SISTEMA "CONVO" E CALCOLO IL BARICENTRO

2) NEL SISTEMA BARICENTRALE "CONVO" G_{xy} CALCOLO

$$J_x, J_y, J_{xy}$$

SE $J_{xy}=0$ HO VINTO, SONO GIÀ NEL SISTEMA CENTRALE, ALTRIMENTI PROSEGUI...

3) CALCOLO α_0 : $\tan(2\alpha_0) = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$

4) CALCOLO $J_{\bar{x}}, J_{\bar{y}}$

$$\left. \begin{matrix} J_{\bar{x}} \\ J_{\bar{y}} \end{matrix} \right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

NOTA che $J_{\bar{x}}$ è SEMPRE IL MASSIMO, $J_{\bar{y}}$ IL MINIMO, PER CAPIRE "COME MATTERLI" GUARDO $J_x - J_y$

- $J_x - J_y > 0 \rightarrow$ MASSIMO di $J_{\bar{x}}$, QUINDI $J_{\bar{x}} = J_{\bar{x}}$, l'asse x "RUOTA" di α_0 E DIVENTA $\bar{x}$
- $J_x - J_y < 0 \rightarrow$ MINIMO di $J_{\bar{x}}$, QUINDI $J_{\bar{x}} = J_{\bar{y}}$, l'asse x "RUOTA" di α_0 E DIVENTA $\bar{y}$

ROVESCIAMO IL RAGIONAMENTO....

SUPPONIAMO DI PARTIRE GIÀ DA UN SISTEMA PRINCIPALE $\rightarrow J_{\bar{x}}, J_{\bar{y}}, J_{\bar{x}\bar{y}} = 0$

ALLORA, RUOTANDO IL SISTEMA di α :

$$J_x = \frac{J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}}}{2} + \frac{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}{2} \cos(2\alpha) \quad (1)$$

$$J_y = \frac{J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}}}{2} - \frac{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}{2} \cos(2\alpha) \quad (2)$$

$$J_{xy} = \frac{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}{2} \sin(2\alpha) \quad (3)$$

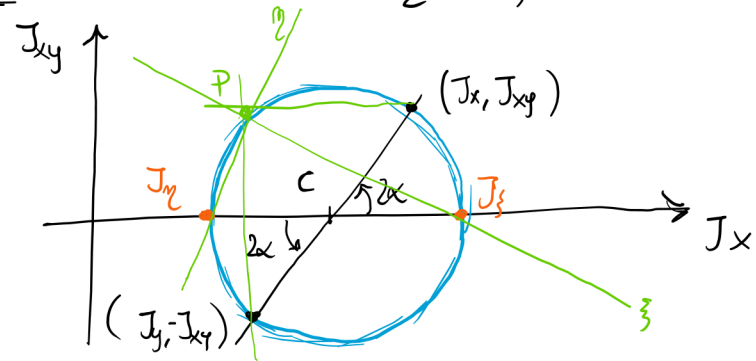
$$(1)^2 + (3)^2 \rightarrow$$

$$\left[J_x - \frac{J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}}}{2} \right]^2 + [J_{xy}]^2 = \left[\frac{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}{2} \right]^2$$

EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA NEL PIANO $J_x - J_{xy}$

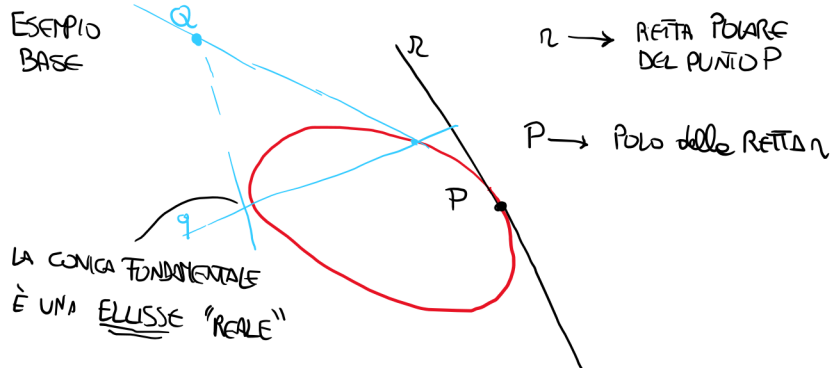
CIRCONFERENZA DI MOHR

CENTRO: $C = \left(\frac{J_{\bar{x}} + J_{\bar{y}}}{2}, 0 \right)$ RAGGIO: $\frac{J_{\bar{x}} - J_{\bar{y}}}{2}$



POLARITÀ D'INERZIA

POLARITÀ → in MATEMATICA, è IL LEGAME TRA UN PUNTO ed una RETTA ATTRAVERSO UNA CONICA



- SE LA RETTA È TANGENTE → il POLO P è IL PUNTO di TANGENZA

- SE LA RETTA NON È TANGENTE → ALGORITMI PER LA COSTRUZIONE della POLARE

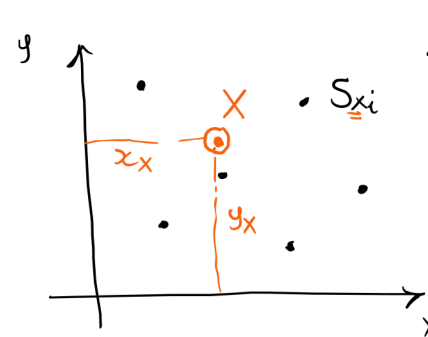
Se UNA RETTA CONTIENE IL PROPRIO POLO → RETTA AUTOCONIUGATA

LA CONICA FONDAMENTALE È IL LUOGO DEI PUNTI AUTOCONIUGATI!!

IN UN SISTEMA (CONTINUO O DISCRETO)

- IL LEGAME TRA CENTRO RELATIVO X di UN ASSE x E L'ASSE STESSO È UNA POLARITÀ CON CONICA FONDAMENTALE UNA ELLISSE IMMAGINARIA
- IL LEGAME TRA IL SIMMETRICO DI X rispetto a G E L'ASSE STESSO È UNA POLARITÀ CON CONICA FONDAMENTALE L'ELLISSE CENTRALE D'INERZIA (REALE)

CENTRO RELATIVO DI UN SISTEMA DI MASSE:



NEL SISTEMA DI MASSE, SOSTITUISCO ALLA MASSA m_i IL MOMENTO STATICO RISpetto all'ASSE CONSIDERATO

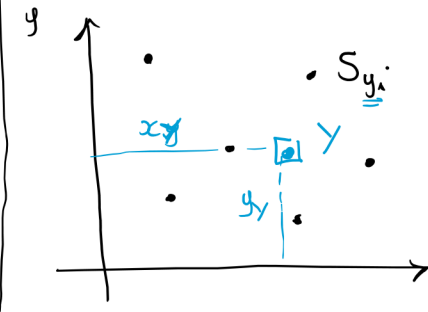
$$S_{xi} = m_i y_i$$

IL BARICENTRO X di QUESTO SISTEMA SI CHIAMA CENTRO RELATIVO alla RETTA x

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \\ y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \end{cases} \leadsto$$

$$x_x = \frac{\sum (m_i y_i) x_i}{\sum m_i y_i} = \frac{J_{xy}}{S_x}$$

$$y_x = \frac{\sum (m_i y_i) y_i}{\sum m_i y_i} = \frac{J_x}{S_x}$$



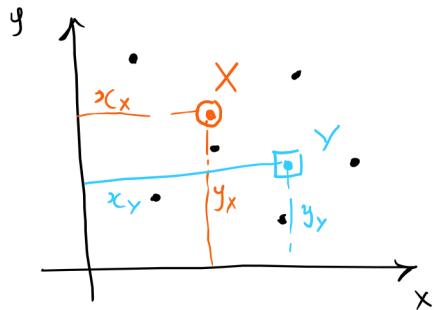
ANALOGAMENTE POSSO CALCOLARE IL CENTRO RELATIVO Y rispetto all'ASSE y

$$x_y = \frac{\sum (m_i x_i) x_i}{\sum m_i x_i} = \frac{J_y}{S_y}$$

$$y_y = \frac{\sum (m_i x_i) y_i}{\sum (m_i x_i)} = \frac{J_x}{S_y}$$

ALLA FINE I DUE CENTRI RELATIVI AGLI ASSI x e y

$$\begin{cases} x_X = \frac{J_{xy}}{S_x} \\ y_X = \frac{J_x}{S_x} \end{cases} \quad \begin{cases} x_Y = \frac{J_y}{S_y} \\ y_Y = \frac{J_{xy}}{S_y} \end{cases}$$



AL DENOMINATORE
C'È S_y o S_x

SE LA RETTA È
BARICENTRALE, IL
CENTRO DIVENTA UN
PUNTO IMPROPRIO (∞)

IN TERMINI DI RAGGIO D'INERZIA...

$$S_x^2 = \frac{J_x}{A} \rightarrow J_x = A S_x^2 \quad S_x = A y_G$$

$$J_y = A S_y^2 \quad S_y = A x_G$$

$$y_X = \frac{J_x}{S_x} = \frac{A S_x^2}{A y_G} = \frac{S_x^2}{y_G} \quad x_Y = \frac{S_y^2}{x_G}$$

INOLTRE (Th Huygens) $S_x^2 = S_{x0}^2 + y_G^2$

$$y_X = y_G + \frac{S_{x0}^2}{y_G} \rightarrow \text{IL CENTRO RELATIVO È SEMPRE PIÙ DISTANTE DEL BARICENTRO DALL'ASSE!}$$

QUINDI

$$\begin{cases} x_X = \frac{J_{xy}}{S_x} \\ y_X = \frac{S_x^2}{y_G} \end{cases} \quad \begin{cases} x_Y = \frac{S_y^2}{x_G} \\ y_Y = \frac{J_{xy}}{S_y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{xy} = S_x x_X = A y_G x_X \\ J_{xy} = S_y y_Y = A x_G y_Y \end{cases}$$

↓

$$y_G x_X = x_G y_Y$$

Th di RECIPROCIÀ:

DUE 2 RETTE NON BARICENTRALI ($x_G \neq 0, y_G \neq 0$), ALLORA

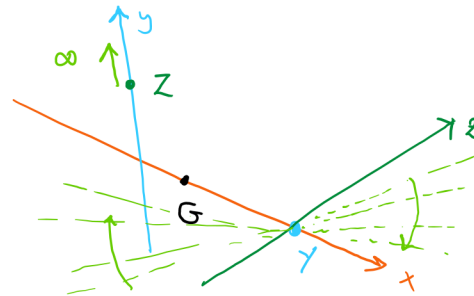
$$X \in y \Leftrightarrow Y \in x$$

~ SI ESTENDE FACILMENTE
A RETTE BARICENTRALI !!!

Dim: $X \in y \Rightarrow x_X = 0 \Rightarrow y_G x_X = x_G y_Y = 0 \Rightarrow y_Y = 0 \quad \square$

QUANDO $X \in y$ e $Y \in x$, ALLORA x e y SONO DETTE RETTE CONIUGATE

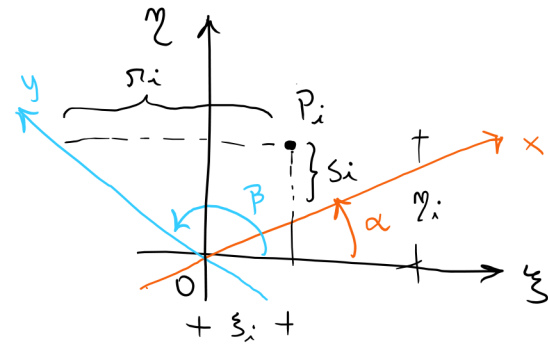
$$x, y \text{ CONIUGATE} \Leftrightarrow J_{xy} = 0$$



$$y_2 = \frac{J_2}{S_2} \quad \text{FINITO}$$

~ TENDE A ZERO PER $z \rightarrow x$

RELAZIONE DI CONIUGIO



DATO IL FASCIO DI RETTE PASSANTE PER O, TROVARE ANGOLI α, β RELATIVI A DUE RETTE CONIUGATE

O $\xi \eta$ è PRINCIPALE

y, x CONIUGATE $\Leftrightarrow J_{xy} = 0$ J_{xy} SI PUÒ SCRIVERE CALCOLANDO LE LUNGHEZZE IN QUALSIASI DIREZIONE

$$J_{xy} = 0 \quad \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N m_i s_i r_i = 0$$

$$\begin{cases} s_i = r_i - \xi_i \tan \alpha \\ r_i = \xi_i + \eta_i \tan(\beta - \frac{\pi}{2}) = \xi_i - \eta_i \cot \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s_i = r_i - \xi_i \tan \alpha \\ r_i = \xi_i - \eta_i \frac{1}{\tan \beta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum_{i=1}^N m_i s_i r_i = \sum_{i=1}^N m_i (\eta_i - \xi_i \tan \alpha) (\xi_i - \eta_i \frac{1}{\tan \beta}) = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \xi_i \eta_i}_{J_{\xi\eta}=0} - \tan \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \xi_i^2}_{J_{\xi}} - \frac{1}{\tan \beta} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \eta_i^2}_{J_{\eta}} + \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \xi_i \eta_i}_{J_{\xi\eta}=0} = 0 \end{aligned}$$

RELAZIONE DI CONIUGIO

$$\tan \alpha \tan \beta = - \frac{J_{\xi}}{J_{\eta}}$$

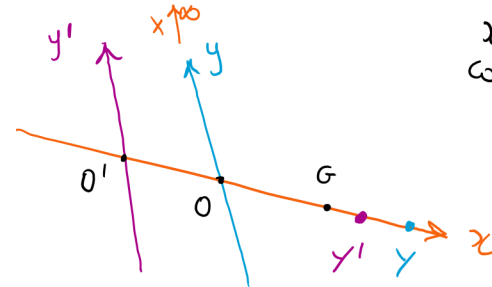
UTILE NELLA FLESSIONE DEVIATA

RISCRITTA IN TERMINI DI RAGGI D'INERZIA

$$J_{\xi} = \rho_{\xi}^2 A, \quad J_{\eta} = \rho_{\eta}^2 A \rightarrow \tan \alpha \tan \beta = - \frac{\rho_{\xi}^2}{\rho_{\eta}^2}$$

NOB. i) VISTA LA PRESENZA DEL SEGNO (-), DUE RETTE CONIUGATE NON SONO MAI NELLO STESSO QUADRANTE

ii) DATA UNA RETTA BARICENTRICA x e LA CONIUGATA y , LE PARALLELE y' SONO ANCHE CONIUGATE A x



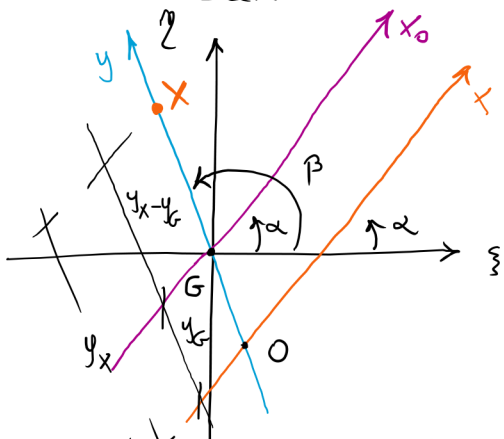
x e y CONIUGATE $\Leftrightarrow J_{xy} = 0$

TH TRASPORTO

$$J_{xy} = J_{x_0 y_0} + M x_G y_G$$

$\forall y' \parallel y, y_G = 0 \Rightarrow J_{xy'} = J_{xy} = 0 \rightarrow y' \text{ e } x \text{ SONO CONIUGATE, } y' \text{ STA SU } x$

ESEMPIO: NOTO SISTEMA CENTRALE D'INERZIA, TROVARE RETTA CONIUGATA E CENTRO



1) PORTO LA PARALLELA x_0 BARICENTRALE

$$2) J_{x_0} = \frac{J_s + J_y}{2} + \frac{J_s - J_y}{2} \cos 2\alpha$$

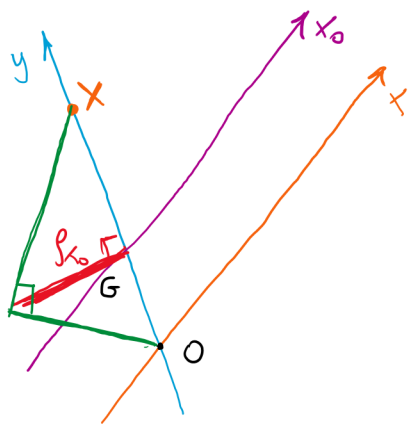
$$\hookrightarrow p_{x_0}^2 = \frac{J_{x_0}}{A}$$

3) y E' BARICENTRICA, x_0 E' CONIUGATA, ANCHE x E y SONO CONIUGATE

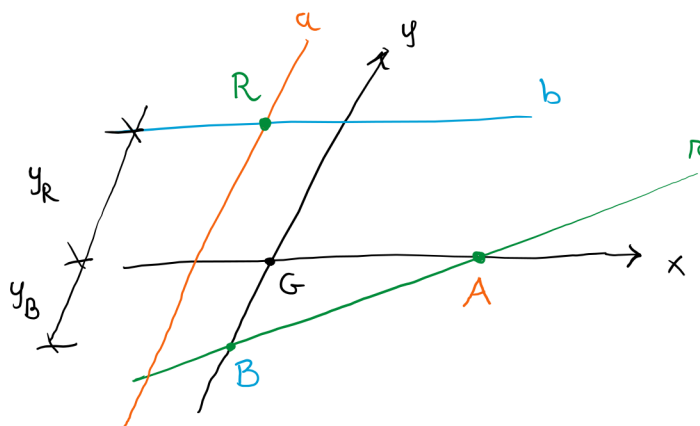
$$4) y_x = y_G + \frac{p_{x_0}^2}{y_G} \rightarrow y_G (y_x - y_G) = p_{x_0}^2$$

RAGGIO D'INERZIA E' MEDIO GEOMETRICO

$$\overline{OG} \cdot \overline{GX} = p_{x_0}^2$$



ESEMPIO: NOTE 2 RETTE CONIUGATE BARICENTRICHE, TROVARE IL CENTRO DI UNA TERZA RETTA r



$$A = (x_A, 0)$$

$$B = (0, y_B)$$

COORDINATE DEL CENTRO DATO LA RETTA

RETTA r

$$\frac{x}{x_A} + \frac{y}{y_A} - 1 = 0$$

$$y_R \cdot y_B = -p_x^2$$

$$x_R \cdot x_A = -p_y^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_R = -\frac{p_y^2}{x_A} \\ y_R = -\frac{p_x^2}{y_B} \end{cases}$$

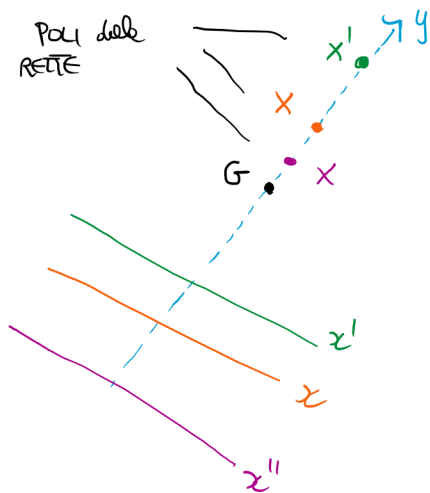
VICEVERSA, SE CONOSCO LE COORD. DEL CENTRO

$$\begin{aligned} A &= (x_A, 0) \\ B &= (0, y_B) \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x_A = -\frac{p_y^2}{x_R} \\ y_B = -\frac{p_x^2}{y_R} \end{cases}$$

$$\frac{x_R}{p_y^2} x + \frac{y_R}{p_x^2} y + 1 = 0$$

ASSE NEUTRO NEL CASO DI SFORZO NORMALE ECCENTRICO APPLICATO IN R

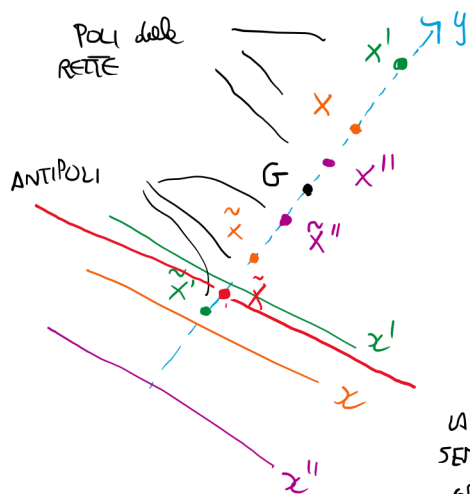
POLARITÀ, ANTIPOLARITÀ, ELLISSE CENTRALE



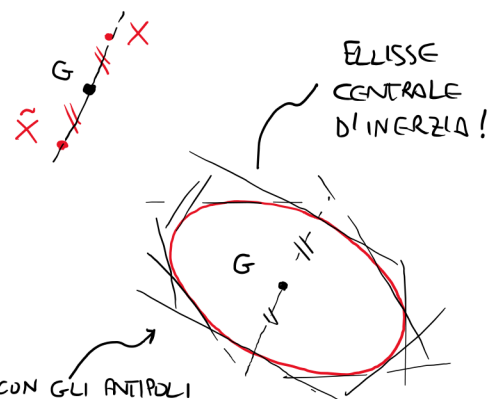
LEGAME TRA CENTRO
E RETTA CONSIDERATA È UNA
POLARITÀ che HA COME
CONICA FONDAMENTALE
UNA
ELLISSE IMAGINARIA

LA CONICA È PER DEFINIZIONE IL LUOGO
DEI PUNTI AUTOCONIUGATI, QUINDI
SE SPOSTANDO LA x IL CENTRO G
NON LA INTERCETTA MAI, NON RIESCO
A "DISEGNARE LA CONICA"

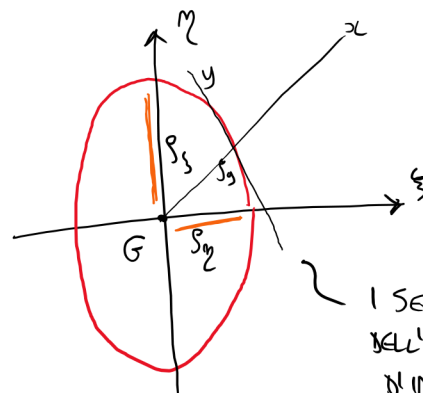
CONSIDERO L'ANTIPOLLO → SIMMETRICO RISPETTO AL BARICENTRO



CON GLI ANTIPOLI
LA POSSO DISEGNARE,
SEMPLICEMENTE IL PUNTO CERCATO È ALL'ESTREMO
OPPOSTO DEL DIAMETRO



ELLISSE CENTRALE D'INERZIA (σ di CULMANN)



$$\frac{\xi^2}{S_\eta^2} + \frac{\eta^2}{S_\xi^2} - 1 = 0$$

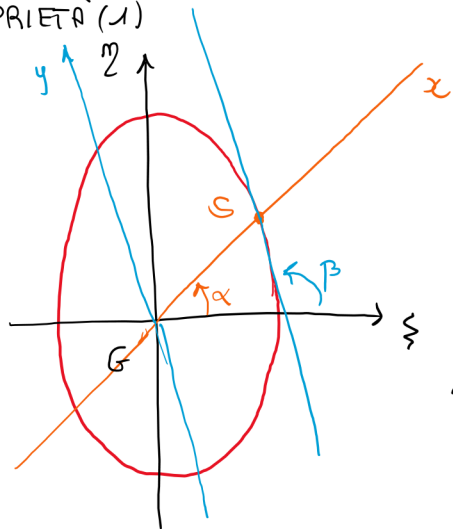
I SEMIASSI PRINCIPALI
DELL'ELLISSE SONO I GRADATORI
D'INERZIA

$G\xi\eta$ è CENTRALE
↓
 $J_{\xi\eta} = 0$,
GLI ASSI SONO
CONIUGATI!!

PROPRIETÀ:

- 1) DATA UNA RETTA x , LA CONIUGATA y È PARALLELA ALLE TANGENTI DELL'ELLISSE DI CULMANN NEI PUNTI DI INTERSEZIONE CON x
- 2) IL SEMIDIAMETRO GENERALE È IL RAGGIO D'INERZIA NELLA DIREZIONE CONIUGATA

PROPRIETÀ (1)



$$f(\xi, \eta) = \frac{\xi^2}{S_\eta^2} + \frac{\eta^2}{S_\xi^2} - 1 = 0$$

$f(\xi, \eta) = 0$ CURVA
FORA IMPLICITA

LA TANGENTE IN S è

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|_S \cdot (\xi - \xi_S) + \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_S \cdot (\eta - \eta_S) = 0$$



$$\frac{\xi_S}{S_\eta^2} (\xi - \xi_S) + \frac{\eta_S}{S_\xi^2} (\eta - \eta_S) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{2\xi}{S_\eta^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{2\eta}{S_\xi^2}$$

$$\left[\frac{\xi_S}{S_\eta^2} \right] \xi + \left[\frac{\eta_S}{S_\xi^2} \right] \eta - \underbrace{\left[\frac{\xi_S^2}{S_\eta^2} + \frac{\eta_S^2}{S_\xi^2} \right]}_1 = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\xi_S}{S_\eta^2} \xi + \frac{\eta_S}{S_\xi^2} \eta - 1 = 0}$$

IL COEFF. ANGOLARE
della TANGENTE È

$$t_\beta = - \frac{\xi_S}{S_\eta^2} \cdot \frac{S_\xi^2}{\eta_S} = - \underbrace{\frac{\xi_S}{\eta_S}}_{t_{\beta\alpha}} \cdot \frac{S_\xi^2}{S_\eta^2} \rightarrow t_\alpha \cdot t_\beta = - \frac{S_\xi^2}{S_\eta^2}$$

OTTENGO LA RELAZIONE
DI CONIUGIO !!!

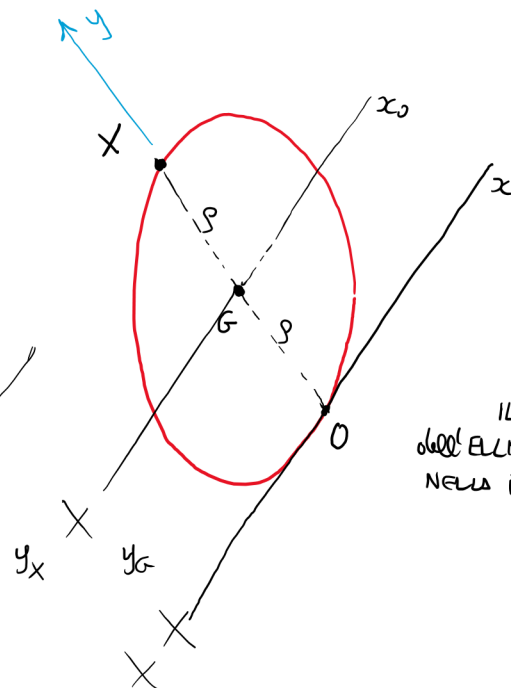
PROPRIETÀ (2)

CON DISTANZE MISURATE IN Oxy

$$y_X = y_G + \frac{S_{XO}^2}{y_G}$$

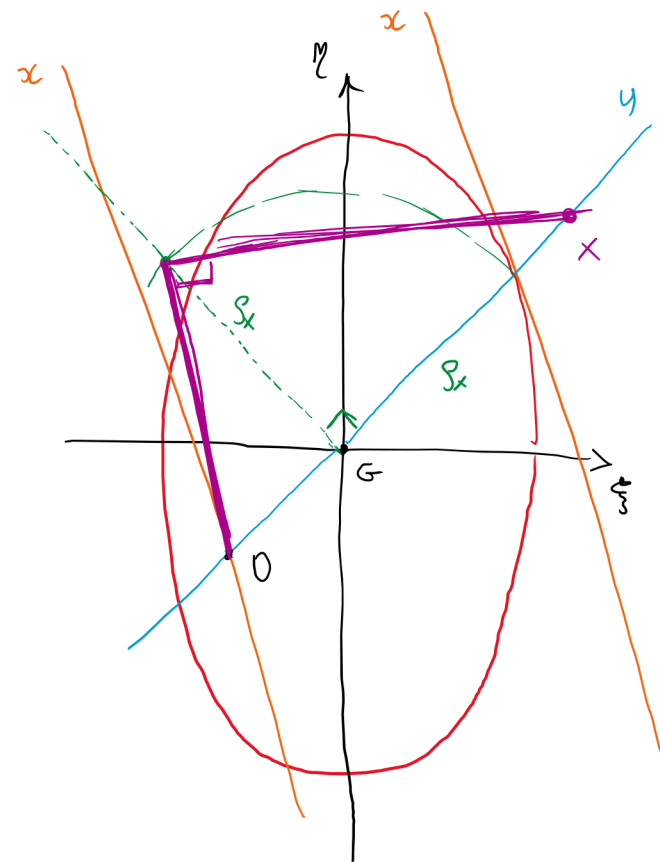
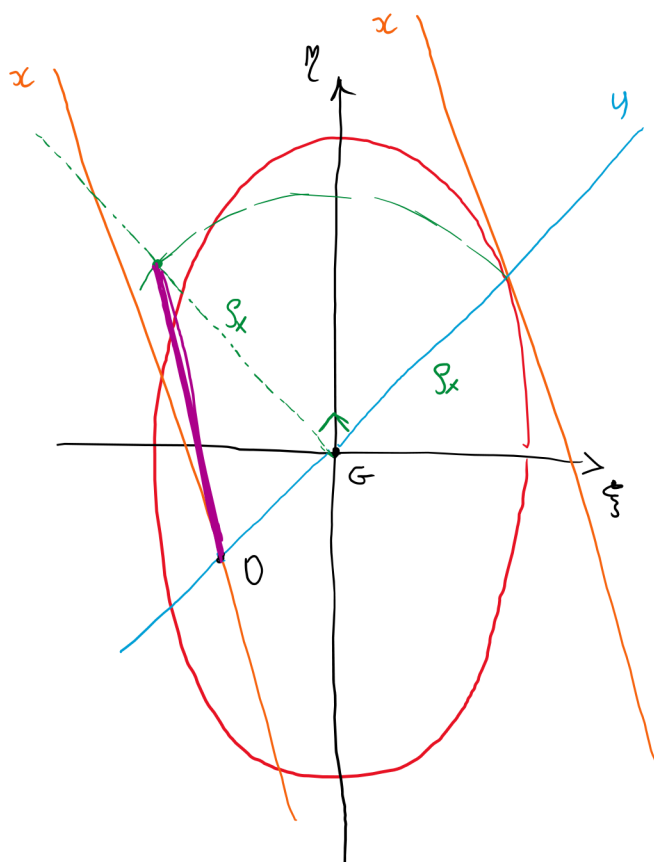
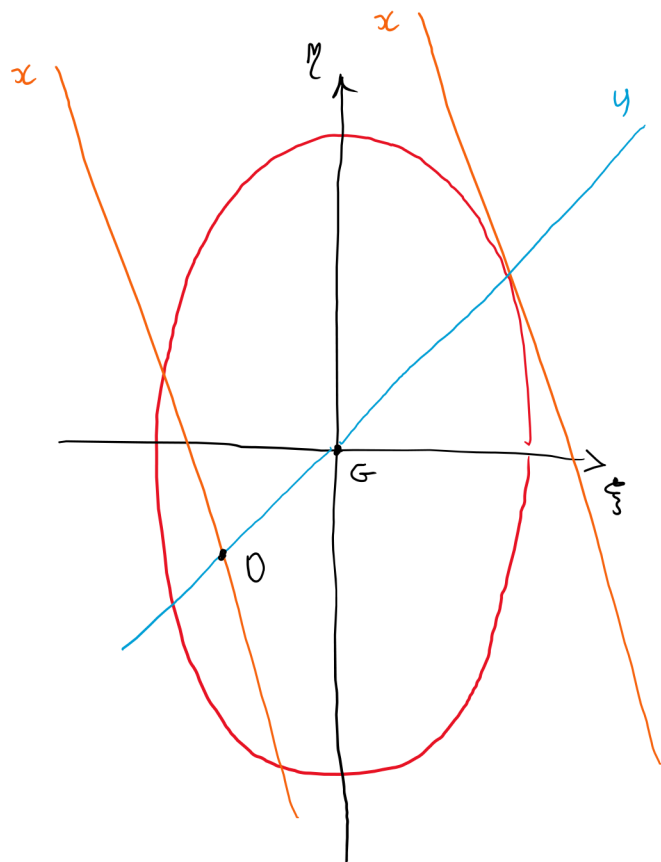
ma $y_X = 2p$, $y_G = p$

$$2p = p + \frac{p_{OX}^2}{p} \rightarrow \boxed{p_{OX}^2 = p}$$



IL SEMI-DIAMETRO
DELL'ELIPSE COINCIDE CON IL RAGGIO D'INERZIA
NELLA DIREZIONE CONIUGATA !!

CON L'ELLISSE CENTRALE È FACILE
TROVARE IL POLO RISPETTO A RETTA GENERICA



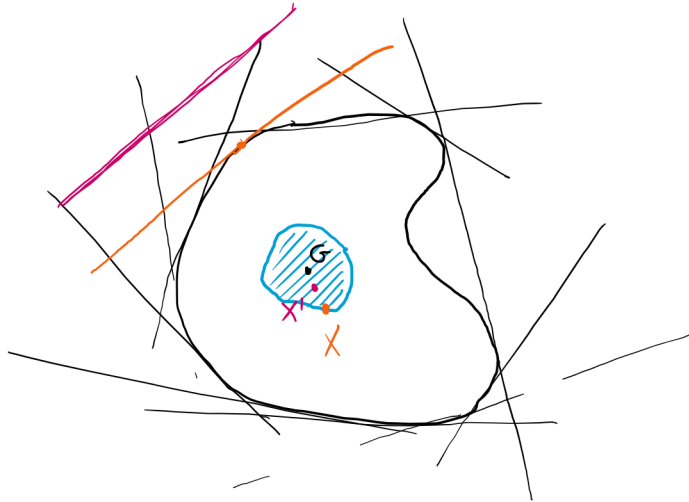
2° TEOREMA DI EUCLIDE

$$OG \cdot GX = p_x^2$$

NOCCIULO CENTRALE D'INERZIA

È IL LUOGO DEI CENTRI RELATIVI DELLE RETTE CHE NON TAGLIANO LA FIGURA DATA

→ IL BORDO DEL NOCCIULO È IL LUOGO DELLE TANGENTI ALLA FIGURA



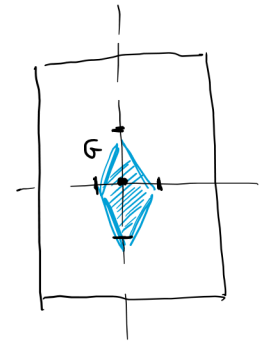
UTILE NELLO STUDIO NORMALE ECCENTRICO

CENTRO DI PRESSIONE E ASSE NEUTRO SONO ANTIPOLARI

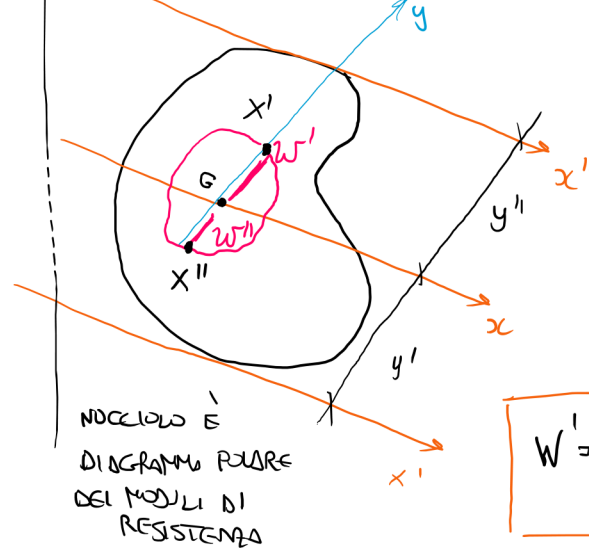
→ SE IL CENTRO DI PRESSIONE È DENTRO AL NOCCIULO, L'ASSE NEUTRO È ESTERNO ALLA FIGURA, QUINDI LA SEZIONE È TUTTA TESA O TUTTA COMPRESSA

PROPRIETÀ:

- 1) IL BARICENTRO È SEMPRE INTERNO AL NOCCIULO
- 2) AI VERTICI DEL CONTORNO DELLA FIGURA CORRISPONDONO TRATTI RETTILINEI DEL NOCCIULO E VICEVERSA
- 3) SE LA FIGURA È UNA POLIGONALE A M LATI, ANCHE IL NOCCIULO LO È
- 4) IL NOCCIULO È SEMPRE INTERNO ALLE TANGENTI DELLA FIGURA
- 5) SE L'ELLSSE D'INERZIA È INTERNO ALL'INVILUPPO DELLE TANGENTI, IL NOCCIULO È INTERNO ALL'ELLSSE
- 6) IL BORDO DEL NOCCIULO HA GLI STESSI ASSI DI SIMMETRIA DELLA FIGURA



MODULI DI RESISTENZA



$y \rightarrow$ CONIUGATA di x $x', x'' \rightarrow$ PARALLELE A x E TANGENTI ALLA FIGURA

X', X'' ANTIPOLI di x' e x'' (SUL NOCCIULO)

$w', w'' \rightarrow$ RAGGI DEL NOCCIULO (MISURATI LUNGO LA CONIUGATA y)

$$\left. \begin{aligned} y' w' &= j_x^2 \\ y'' w'' &= j_x^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{w' = \frac{j_x^2}{y'} \quad w'' = \frac{j_x^2}{y''}}$$

$$j_x^2 = A j_x$$

$$\boxed{W' = \frac{j_x}{y'}, \quad W'' = \frac{j_x}{y''}} \quad \text{MODULI DI RESISTENZA}$$

$$\boxed{W' = A w', \quad W'' = A w''}$$