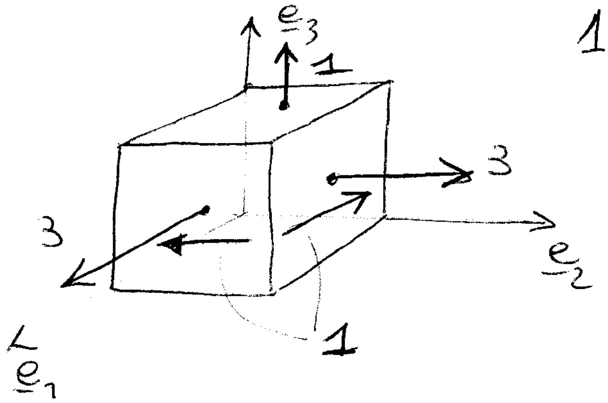
ESERCIZIO

Assegnato lo stato tensionale indicato nel disegno a fianco:



[$N/mm^2 \equiv MPa$]

a) Scrivere l'espressione del tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ nel sistema $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$;

b) Determinare le direzioni e le tensioni principali.

c) Calcolare le componenti idrostatica e deviatorica di $\underline{\sigma}$.

SOLUZIONE

a) $$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [N/mm^2]$$

b) Si osserva che $\underline{e}_3$ è una direzione principale e la relativa tensione principale è $1\ N/mm^2$.

In generale $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ si determinano risolvendo il seguente problema agli autovalori:

$$(\underline{\sigma} - \sigma_I \underline{I})\, \underline{n}_I = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\sigma_I & -1 & 0 \\ -1 & 3-\sigma_I & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sigma_I \end{vmatrix} = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$(1-\sigma_I)\left((3-\sigma_I)^2-1\right)=0 \quad\Rightarrow\quad (1-\sigma_I)(\sigma_I-2)(\sigma_I-4)=0$$

da cui seguono i valori delle 3 tensioni principali:

$$\sigma_I = 4\ \frac{N}{mm^2}\,, \quad \sigma_{II} = 2\ \frac{N}{mm^2}\,; \quad \sigma_{III} = 1\ \frac{N}{mm^2}.$$

Calcolo autovettori:

$\boxed{\underline{n}_I} \rightarrow$ Siano n_I^1, n_I^2, n_I^3 le componenti di $\underline{n}_I$ nel sistema $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$. Il sistema di equazioni per determinare n_I^1, n_I^2, n_I^3 è:

$$\left.\begin{aligned}(3-4)\,n_I^1 - n_I^2 &= 0\\ -n_I^1 + (3-4)\,n_I^2 &= 0\\ (1-4)\,n_I^3 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_I^1 = -n_I^2 &= \lambda\\ n_I^3 &= 0\end{aligned}$$

Imponendo che $|\underline{n}_I|=1$ si ottiene

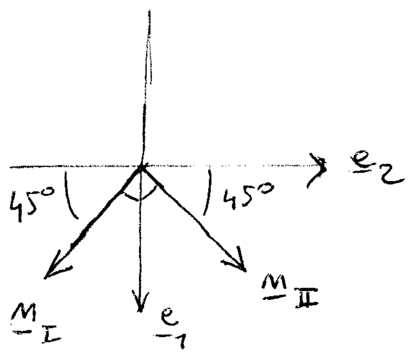
$$\underline{n}_I = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$\boxed{\underline{n}_{II}} = (n_{II}^1, n_{II}^2, n_{II}^3)$

$$\left.\begin{aligned}(3-2)\,n_{II}^1 - n_{II}^2 &= 0\\ -n_{II}^1 + (3-2)\,n_{II}^2 &= 0\\ n_{II}^3 &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$n_{II}^1 = n_{II}^2 = \lambda$$
$$n_{III}^3 = 0$$

$$\underline{n}_{II} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

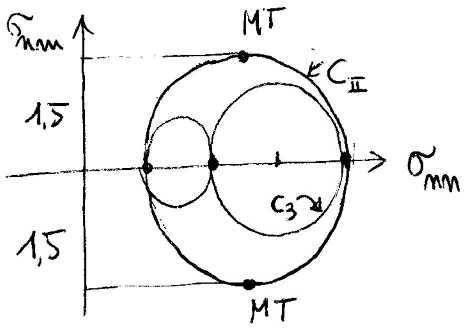


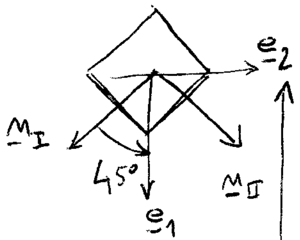
$\underline{n}_{III} \rightarrow \quad \underline{n}_{III} \equiv (0, 0, \pm 1)$.

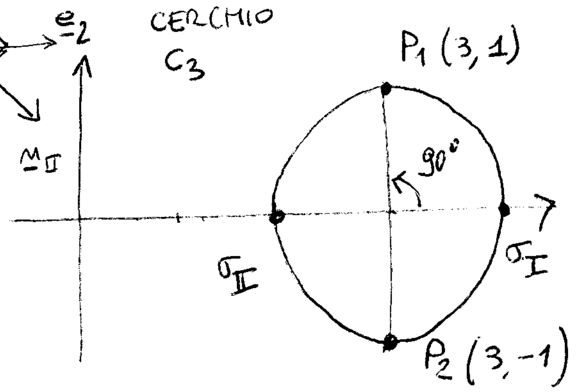
OSSERVAZIONI

Lo stato tensionale è triassiale perché tutte le 3 tensioni principali sono $\neq 0$.

Nel piano di Mohr lo stato tensionale si rappresenta nel modo seguente:

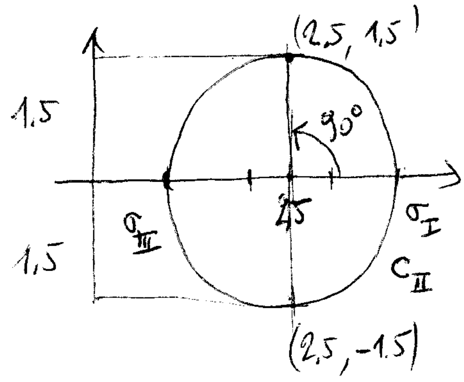


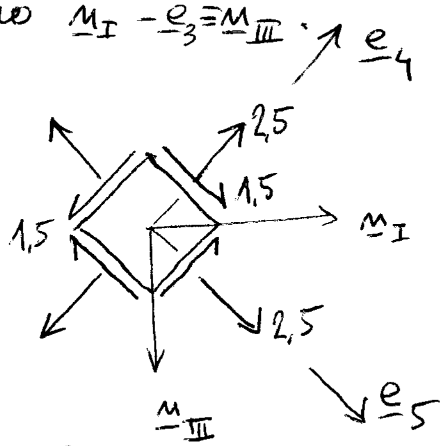


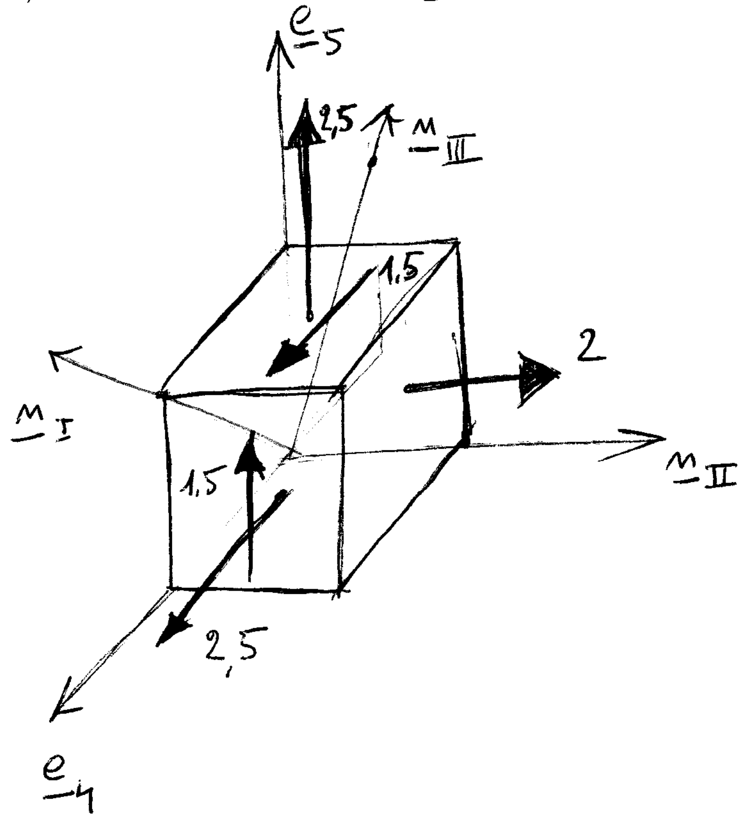


Essendo $\underline{e}_3$ già direzione principale il cerchio C_3 (individuato da $\sigma_{II} = 2$ e da $\sigma_I = 4$) descrive tutti gli stati tensionali relativi alle giaciture aventi normali contenute nel piano $\underline{e}_1 - \underline{e}_2$ o, equivalentemente, $\underline{n}_I - \underline{n}_{II}$.
La massima tensione tangenziale, tra queste giaciture, si ha proprio per le facce di normale $\underline{e}_1$ (punto nel piano di Mohr P_1) ed $\underline{e}_2$ (P_2 nel piano di Mohr).

Per determinare la giacitura dove è presente la MAX tensione tangenziale (punto MT, $\sigma_{nm}^{MAX} \equiv \tau_{MAX} = 1{,}5\ N/mm^2$) ci si può riferire al cerchio C_{II} relativo alle giaciture di normale $\in$ al piano $\underline{n}_I - \underline{e}_3 \equiv \underline{n}_{III}$.







Nel sistema $\underline{e}_4, \underline{n}_{II}, \underline{e}_5$ il tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ risulta:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 2{,}5 \end{bmatrix} \quad [N/mm^2]$$

(Verificare che gli invarianti non cambiano.)

c) $$\underline{\sigma} = \underbrace{\sigma_m \underline{I}}_{\text{IDRO}} + \underbrace{\underline{S}}_{\text{DEV.}} \quad , \quad \sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\underline{S} = \underline{\sigma} - \sigma_m \underline{I} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{bmatrix}$$

$[N/mm^2]$

(Rispetto alla base $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$) Notare che $I_1(\underline{S}) = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$.

Rispetto alla base $\underline{u}_I, \underline{u}_{II}, \underline{u}_{III}$:

La parte idrostatica non cambia.

$$\underline{S} = \underline{\sigma} - \sigma_m \underline{I} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{bmatrix}$$

$[N/mm^2]$

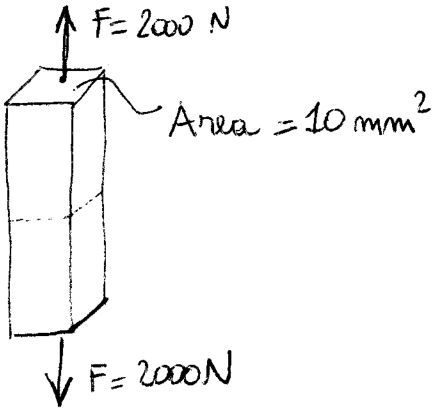
$$I_1(\underline{S}) = 0$$

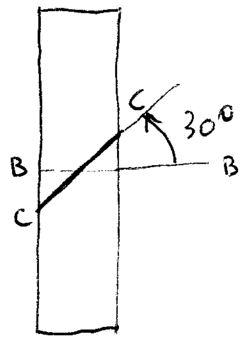
Rispetto alla base $\underline{e}_4, \underline{u}_{II}, \underline{e}_5$

$$\underline{S} = \underline{\sigma} - \sigma_m \underline{I} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} [N/mm^2]$$

$$I_1(\underline{S}) = 0$$

ESERCIZIO



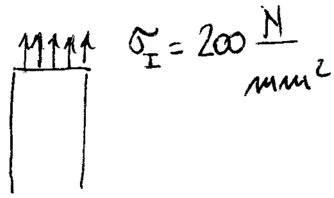


a) Calcolare lo stato tensionale relativo alla giacitura C-C;

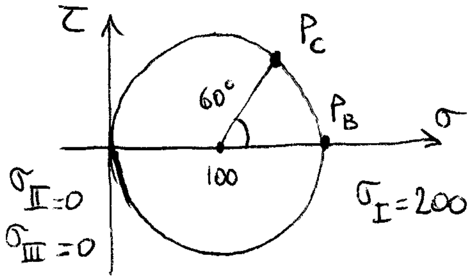
b) Verificare che la forza agente su C-C è sempre F= 2000 N.

SOLUZIONE

a) Stato tensionale relativo a B-B.



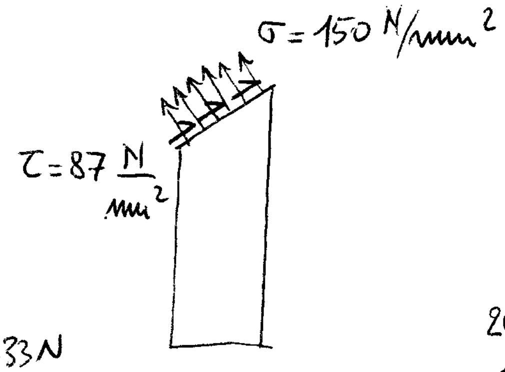
Cerchio di Mohr



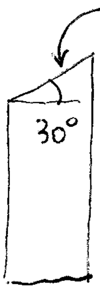
Raggio = 100

Le coordinate di P_C (giac. C-C) sono:

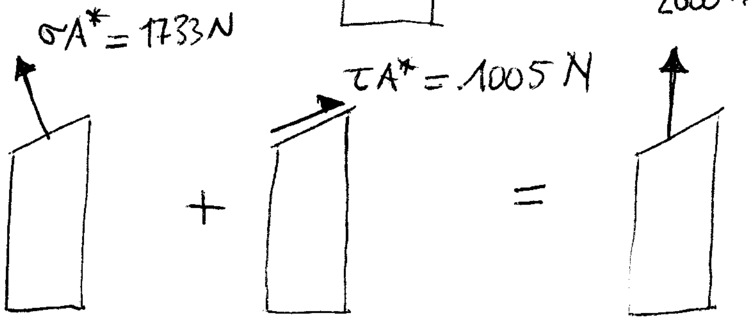
$P_C \equiv (150, 87)$



b)



$A^* = \frac{A}{\cos 30°} = 11.55\ mm^2$



ESERCIZIO

Si supponga che lo stato di sollecitazione all'interno di un mezzo continuo sia descritto dal tensore degli sforzi:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -kz & ky \\ -kz & 0 & 0 \\ ky & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con k costante arbitraria.
[(x,y,z) coordinate cartesiane]

a) Dimostrare che, con forze di volume nulle, le equaz. indefinite di equilibrio risultano soddisfatte.

b) Calcolare le tensioni principali nel punto $B \equiv (4,2,-1)$.

c) Tracciare i tre cerchi di Mohr.

d) Valutare la MAX tensione tangenziale.

SOLUZIONE

a) $\sigma_{ij,j}=0 \Rightarrow \sigma_{11,x}+\sigma_{12,y}+\sigma_{13,z}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial(-kz)}{\partial y}+\dfrac{\partial(ky)}{\partial z}=0$

$\sigma_{21,x}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}(-kz)=0$

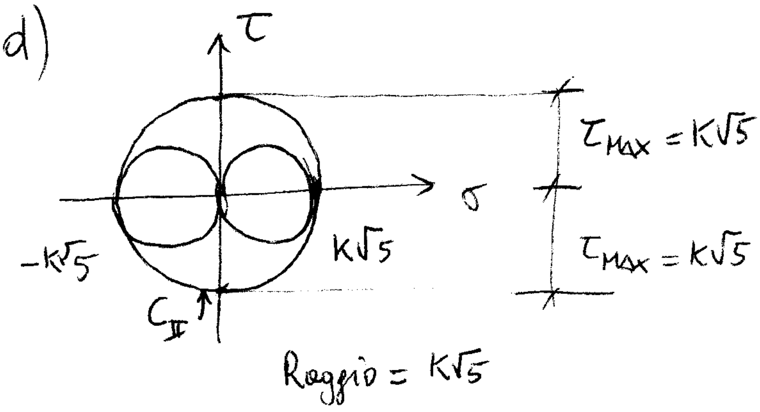
$\sigma_{31,x}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}(ky)=0$ ok!

b) Lo stato tensionale è PIANO o BIASSIALE perché $\det\underline{\sigma}=0$. Ci sarà, quindi, una tensione principale nulla.

$$(\underline{\sigma}-\sigma_I \underline{I})\underline{n}_I=\underline{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma_I & K & 2K \\ K & -\sigma_I & 0 \\ 2K & 0 & -\sigma_I \end{vmatrix}=0 \rightarrow -\sigma_I^3+5K^2\sigma_I=0$$

$\sigma_I = K\sqrt{5}$, $\sigma_{II}=0$, $\sigma_{III}=-K\sqrt{5}$

c), d)



Per determinare su quale giacitura si ha la max tens. tangenziale occorre determinare le direzioni principali.

Ad esempio, $\underline{n}_{II}$ (relativa a $\sigma_{II} = 0$) risulta:

$$\underline{n}_{II} \equiv \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Il cerchio C_{II} descrive gli stati tensionali relativi a giaciture aventi l'asse $\underline{n}_{II}$ come sostegno. La MAX tensione tangenziale si ha proprio in una di queste giaciture.

■

ESERCIZIO

In un punto interno del corpo sia $\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ il tensore degli sforzi, con σ_{11} incognita.

a) Determinare σ_{11} in modo che su qualche giacitura il vettore tensione sia nullo.

b) Definire il versore $\underline{a}$ della normale alla giacitura del punto a).

SOLUZIONE

a) È necessario che lo stato tensionale sia PIANO o BIASSIALE. La ricerca di σ_{11} può essere fatta imponendo che una tensione principale sia nulla. Visto che per uno stato PIANO $\det \underline{\sigma} = 0$, osservando la matrice $\underline{\sigma}$ si ottiene immediatamente che $\sigma_{11} = 0$.

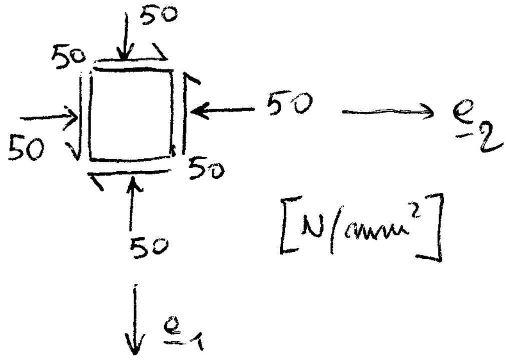
b) Il versore $\underline{a}$ non è altro che la direz. principale relativa alla tensione $\sigma_I = 0$, che è autovalore della matrice $\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
$\underline{a} \equiv \underline{n}_I \equiv (n_I^1, n_I^2, n_I^3)$

$$(\underline{\sigma} - 0\,\underline{I})\,\underline{n} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_I^1 \\ n_I^2 \\ n_I^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} n_I^2 = 0 \\ 2n_I^1 + n_I^3 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{n}_I = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

ESERCIZIO

Verificare che lo stato tensionale rappresentato in figura è MONOASSIALE. Determinare la direzione principale.



$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} -50 & -50 & 0 \\ -50 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

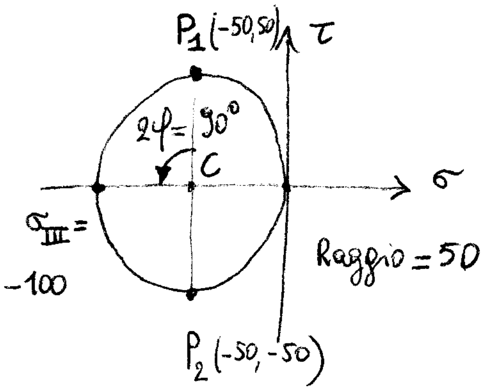
SOLUZIONE

Calcolo tensioni principali : $\begin{vmatrix} -50-\sigma_I & -50 & 0 \\ -50 & -50-\sigma_I & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_I \end{vmatrix} = 0$

$$-\sigma_I \left[(-50-\sigma_I)^2 - 50^2 \right] = 0 \quad ; \quad \sigma_I \left[\cancel{50^2} + \sigma_I^2 + 100\,\sigma_I - \cancel{50^2} \right] = 0$$

$$\sigma_I = \sigma_{II} = 0 \ \frac{N}{mm^2} \quad ; \quad \sigma_{III} = -100 \ \frac{N}{mm^2}$$

Metodo del Cerchio di Mohr



P_1 : faccia di normale $\underline{e}_1$.

P_2 : faccia di normale $\underline{e}_2$.