Lezione 3

Prodotti

Più in generale dati gli insiemi $X_1, \dots, X_n$ una n-upla ordinata è un elemento del tipo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$ e il prodotto cartesiano di $X_1, \dots, X_n$ è

$$X_1 \times \dots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \dots \wedge x_n \in X_n\}$$

In notazione abbreviata $X_1 \times \dots \times X_n =: \prod_{i=1}^{n} X_i$

Poniamo $\underbrace{X \times \dots \times X}_{n \text{ volte}} =: X^n$, es. $X \times X = X^2$

Dalla definizione di unione e intersezione si ha:

$$\begin{cases} x \in \bigcup_{i \in I} X_i \iff \exists\, i \in I \text{ t.c. } x \in X_i \\ x \notin \bigcup_{i \in I} X_i \iff x \notin X_i \ \ \forall i \in I \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \bigcap_{i \in I} X_i \iff x \in X_i \ \ \forall i \in I \\ x \notin \bigcap_{i \in I} X_i \iff \exists\, i \in I \text{ t.c. } x \notin X_i \end{cases}$$

<u>Leggi di De Morgan per unione e intersezione</u>

$$X, Y \subset Z \implies Z - (X \cup Y) = (Z - X) \cap (Z - Y)$$

e più in generale per $X_i \subset Z$, $i \in I$

$$(1) \qquad Z - \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (Z - X_i)$$

<u>Dimostrazione</u> $x \in Z - \bigcup_{i \in I} X_i \iff x \in Z \wedge x \notin \bigcup_{i \in I} X_i$

$\iff x \in Z \wedge x \notin X_i \ \forall i \in I \iff x \in Z - X_i \ \ \forall i \in I$

$\iff x \in \bigcap_{i \in I} (Z - X_i)$.

In modo simile si dimostra

$$(2) \qquad Z - \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (Z - X_i)$$