Durata: 3 ore.

Esercizio 1

L'obiettivo di questo esercizio è mostrare che $\frac{d}{da}\int_0^a dx\, f(x) = f(a)$, usando tecniche di analisi complessa. A tal fine, data $f(z)$ funzione di variabile complessa analitica all'interno del cerchio unitario, si consideri la funzione

$$F(z) = (\log(z) - \log(z-a))f(z) \ .$$

dove a è un parametro reale con $0 < a < 1$, e la funzione log è definita essere il ramo principale del logaritmo (ovvero, con taglio lungo l'asse reale negativo e con $\mathrm{Im}\log \in [-\pi, \pi]$).

I - (4 punti) Si consideri l'integrale di $F(z)$ sul cammino γ dato dal cerchio unitario percorso in senso antiorario. Si mostri che

$$\frac{d}{da}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma F(z) = f(a) \ .$$

[*Suggerimento*: Applica la derivata alla funzione integranda prima di calcolare l'integrale. Non è richiesto giustificare perché la derivata si possa portare dentro l'integrale.]

II - (6 punti) Si discutano i punti di diramazione e la posizione del taglio di $F(z)$. Quindi si deformi in maniera opportuna il cammino γ per mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma F(z) = \int_0^a dx\, f(x) \ .$$

Mettendo insieme al punto precedente, abbiamo così mostrato la relazione voluta.

III - (5 punti) Si specializzi ora al caso $f(z) = z$. Si calcoli $\oint_\gamma F(z)$ in questo caso usando il teorema esterno dei residui.

Esercizio 2

Si consideri la distribuzione temperata

$$T_N(t) = \theta(N - |t|) \ ,$$

dove N è un parametro reale > 0 e θ denota la funzione theta di Heaviside. Svolgendo questo esercizio, ricorda che le operazioni sulle distribuzioni come derivata o trasformata di Fourier possono sempre essere scambiate d'ordine con il limite nel senso delle distribuzioni.

I - (4 punti) Si mostri che vale il limite nel senso delle distribuzioni

$$\lim_{N \to +\infty} T_N(t) = 1 \ . \tag{1}$$

Si scriva la trasformata di Fourier $\widehat{T_N}(\omega)$ di $T_N(t)$. Quindi se ne determini il limite per $N \to +\infty$ prendendo la trasformata di Fourier dell'equazione (1).

II -(5 punti) Si scriva la derivata $\frac{d}{dt} T_N(t)$ di $T_N(t)$. Quindi si determini il limite per $N \to +\infty$ di $\frac{d}{dt} T_N(t)$ prendendo la derivata del limite in equazione (1). Si verifichi che il limite così ottenuto è valido nel senso delle distribuzioni. Infine si scriva la trasformata di Fourier $\widehat{\frac{d}{dt} T_N}(\omega)$ e se ne determini il limite per $N \to +\infty$, prendendo la trasformata di Fourier del limite trovato per $\frac{d}{dt} T_N(t)$.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio vettoriale delle funzioni dall'intervallo $[-T, T]$ a $\mathbb{C}^2$. Possiamo rappresentare queste funzioni come un vettore

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \ ,$$

in cui le componenti f_1 e f_2 sono funzioni da $[-T, T]$ a $\mathbb{C}$. Su questo spazio definiamo il prodotto scalare

$$\left(\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) = \int_{-T}^{+T} dt \ (g_1(t)^* f_1(t) + g_2(t)^* f_2(t)) \ . \tag{2}$$

I -(5 punti) Si scriva la norma del generico vettore $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ che deriva dal prodotto scalare (2). Si mostri che affinché tale norma converga f_1 e f_2 devono essere in $L^2([-T, T])$. Aggiungendo questa condizione, lo spazio definito sopra è uno spazio di Hilbert, che chiameremo $\mathcal{H}$. Dato un sistema ortonormale completo (s.o.c.) $\{e^{(n)}(t)\}_{n \geq 1}$ su $L^2([-T, T])$, si mostri che

$$\left\{ \begin{bmatrix} e^{(n)}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ e^{(n)}(t) \end{bmatrix} \right\}_{n \geq 1} \ ,$$

è un s.o.c. su $\mathcal{H}$.

II -(4 punti) Si mostri che l'operatore $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definito da

$$U \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(-t) \\ f_1(-t) \end{bmatrix}$$

è unitario.