Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\sqrt{z-a}\sqrt{z-b}}{z} \ , \tag{1}$$

dove a e b sono numeri reali con $b > a > 0$, e con la radice quadrata si intende il ramo principale, che ha il taglio dove l'argomento è un numero reale negativo e ha valori con parte reale ≥ 0.

I - (5 punti) Si discutano le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo, incluso eventualmente il punto all'infinito, e specificando anche i punti di diramazione e la posizione del taglio.

II - (5 punti) Si calcoli il residuo di $f(z)$ in $z = \infty$.

III - (6 punti) Si usi $f(z)$ per calcolare l'integrale reale

$$\int_a^b dx \, \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x} \ . \tag{2}$$

Esercizio 2

Si consideri $F(t)$ funzione in $L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\hat{F}(\omega) = \frac{1 - e^{-\omega^2 T^2}}{\omega^2} \ .$$

I - (4 punti) Si usi l'espressione di $\hat{F}(\omega)$ per dedurre che $F'(t)$ e $tF''(t)$ sono in $L^2(\mathbb{R})$, mentre $F''(t)$ non è in $L^2(\mathbb{R})$.

II -(5 punti) Si usi l'espressione di $\hat{F}(\omega)$ per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt$.

III -(4 punti) Si usi l'espressione di $\hat{F}(\omega)$ per calcolare $\lim_{t \to 0} tF''(t)$.

Esercizio 3

Si consideri l'operatore lineare $T : L^2([-1,1]) \to L^2([-1,1])$ definito tramite l'espansione in serie di Fourier come segue

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \, e^{-\pi i n t} \ \Rightarrow \ T[f](t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{|n|+1} \, e^{-\pi i n t} \ .$$

I - (4 punti) Si calcoli la norma di T.