Durata: 3 ore.

Esercizio 1

L'obiettivo di questo esercizio è mostrare che $\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\pi t^2} = 1$ usando metodi di analisi complessa.

I - (3 punti) Dato un un numero complesso u con $\mathrm{Im}(u) \neq 0$, si consideri l'integrale

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\pi t^2} \frac{e^{i\pi u t}}{\cos(\pi u t)} \ .$$

Si mostri che $I(u) + I(-u) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\pi t^2}$. Usando il cambio di variabile $t \to -t$, si mostri poi che $I(u) = I(-u)$ e si deduca che $I(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\pi t^2}$ (indipendente da u).

II - (6 punti) Si consideri ora la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z^2}}{\sin(\pi z)} \ .$$

Se ne consideri l'integrale $\int_\gamma dz\, f(z)$, sul cammino $\gamma = \gamma_{\text{diag1}} + \gamma_{\text{or1}} + \gamma_{\text{diag2}} + \gamma_{\text{or2}}$ illustrato in fig. 1. Si scelga come parametrizzazione per γ_{diag1}: $z = e^{i\frac{\pi}{4}} t + \frac{1}{2}$; e per γ_{diag2}: $z = -e^{i\frac{\pi}{4}} t - \frac{1}{2}$; in entrambi i casi con il parametro reale $t \in [-\sqrt{2}R, \sqrt{2}R]$. Si mostri che

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma dz\, f(z) = 4i\, I(e^{i\frac{\pi}{4}}) \ .$$

III - (6 punti) Si calcoli $\int_\gamma dz\, f(z)$ usando il teorema dei residui e utilizzando i due punti precedenti si deduca che $\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\pi t^2} = 1$.

Esercizio 2

Si consideri il seguente operatore limitato su $L^2(\mathbb{R})$

$$T[f](t) = \int_t^{+\infty} dt'\, e^{-(t'-t)} f(t') \ .$$

I - (5 punti) Si mostri che

$$\mathcal{F}[T[f]](\omega) = \frac{1}{1+i\omega} \mathcal{F}[f](\omega) \ ,$$

dove $\mathcal{F}$ denota la trasformata di Fourier. [*Suggerimento*: Riscrivi $\int_t^{+\infty} dt'\,(\dots)$ come $\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \theta(t'-t)\,(\dots)$, dove θ è la theta di Heaviside.]

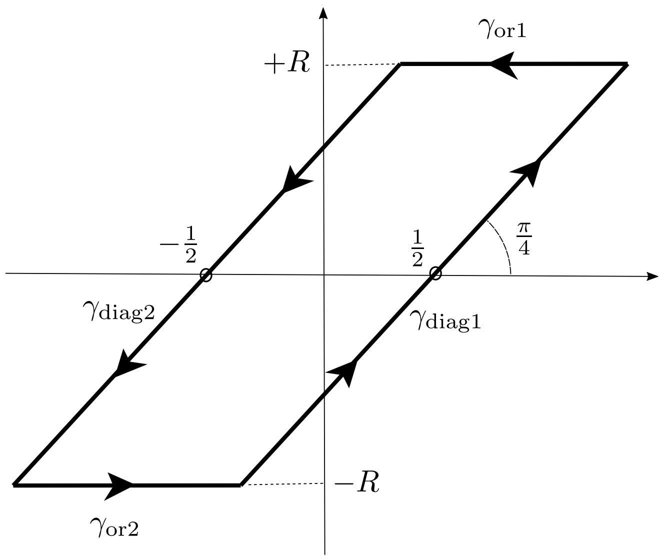

Figure 1

II - (4 punti) Si usi l'equazione derivata nel punto precedente per mostrare che

$$||T|| \leq 1 \ ,$$

dove con $||T||$ si denota la norma operatoriale.

III - (3 punti) Si trovi una successione di funzioni f_n tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||\mathcal{F}[T[f_n]]||}{||\mathcal{F}[f_n]||} = 1$$

e si deduca che dunque $||T|| = 1$.

Esercizio 3

I - (6 punti) Nello spazio di Hilbert H è dato il sistema ortonormale completo $\{e^{(n)}\}_{n\geq 1}$. Si definisca

$$f^{(n)} = e^{(n)} - a\, e^{(n+1)} \ , \quad n \geq 1 \ ,$$

con $a \in \mathbb{C}$ e $|a| < 1$. Si mostri che $f^{(n)}$ è un sistema completo (non ortonormale).