Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1 + e^{i\pi z}}{(1 - z^2)^2} \ .$$

I - (5 punti) Si elenchino le singolarità di $f(z)$ e se ne discuta il tipo (incluso eventualmente $z = \infty$).

II - (6 punti) Notando che per $z = x \in \mathbb{R}$ sull'asse reale vale

$$\mathrm{Re}[f(x)] = \frac{1 + \cos(\pi x)}{(1 - x^2)^2} \ ,$$

si usi la funzione $f(z)$ per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{1 + \cos(\pi x)}{(1 - x^2)^2} \ .$$

Esercizio 2

Si consideri una funzione $F(t) \in L^2(\mathbb{R})$ che è $\neq 0$ solo nell'intervallo $[-T, T]$.

I - (5 punti) Possiamo riscrivere $F(t)$ come

$$F(t) = f(t)\theta(T - |t|) \ , \tag{1}$$

dove θ è la theta di Heaviside e $f(t)$ è una funzione in $L^2([-T, T])$. Considera l'espansione in serie di Fourier per $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{-i\omega_n t} \ , \quad \omega_n = \frac{n\pi}{T} \ . \tag{2}$$

Mostra che

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2T} \hat{F}(\omega_n) \ , \tag{3}$$

dove $\hat{F}$ è la trasformata di Fourier di F. È giustificato considerare il valore di $\hat{F}$ in un punto, perché $\hat{F}$ oltre a essere in $L^2(\mathbb{R})$ è anche una funzione continua. Spiega il perché di quest'ultimo fatto.

II - (4 punti) Sostituisci le equazioni (1)-(2)-(3) nell'integrale che definisce $\hat{F}(\omega)$. Ottieni quindi la *formula di interpolazione di Whittaker-Shannon* (puoi assumere che l'integrale e la somma si possano scambiare)

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\omega_n) \frac{\sin(T(\omega - \omega_n))}{T(\omega - \omega_n)} \ , \tag{4}$$

che mostra che in questo caso la trasformata di Fourier $\hat{F}(\omega)$ è completamente determinata dai suoi valori nel set discreto di punti ω_n.

III - (5 punti) Mostra che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\hat{F}(\omega)|^2 = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{F}(\omega_n)|^2 \ .$$

[*Suggerimento*: non partire da (4), piuttosto usa la relazione (3)...].

Esercizio 3

Su $L^2([-T,T])$ si considerino gli operatori P_+ e P_- definiti da

$$P_\pm[f](t) = \frac{f(t) \pm f(-t)}{2} \ .$$

I - (4 punti) Si mostri che $P_\pm$ sono operatori limitati e autoaggiunti, che soddisfano $P_+ + P_- = \mathbb{1}$ (dove $\mathbb{1}$ indica l'operatore identità), $P_\pm^2 = P_\pm$, $P_+P_- = P_-P_+ = 0$. Si mostri inoltre un qualsiasi vettore nell'immagine di P_+ è ortogonale a un qualsiasi vettore nell'immagine di P_-. (Operatori con queste proprietà si dicono *proiettori ortogonali*).

II - (4 punti) Si usi l'equazione $P_\pm^2 = P_\pm$ per determinare i possibili autovalori di $P_\pm$. Quindi si esibisca un sistema ortonormale completo di autovettori simultanei per P_+ e P_-.