ESERCIZIO 1

I)

Data $F(z) = (\log(z) - \log(z-a))f(z)$ possiamo scrivere che

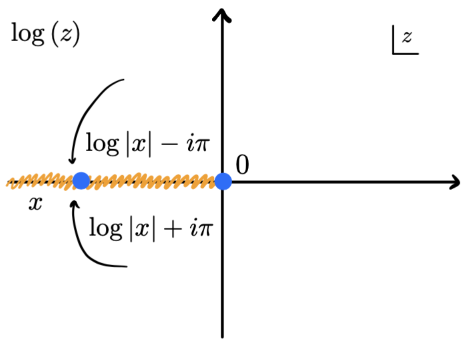
$$\frac{d}{da}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma F(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{d}{da}(\log(z) - \log(z-a))f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z-a}f(z)dz = f(a)$$

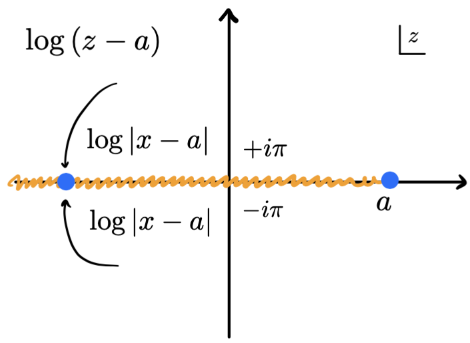
Questo perché l'unica singolarità di $\frac{1}{z-a}f(z)$ all'interno del cerchio unitario è il polo semplice in $z = a$ per cui il residuo è:

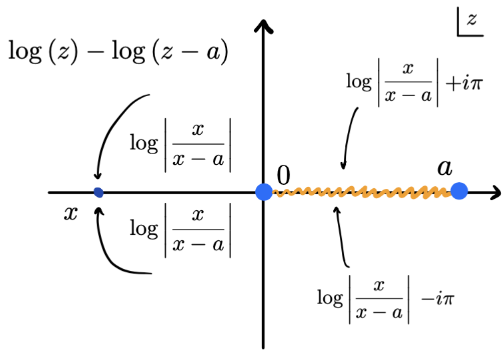
$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{1}{z-a}f(z) = f(a)$$

II)

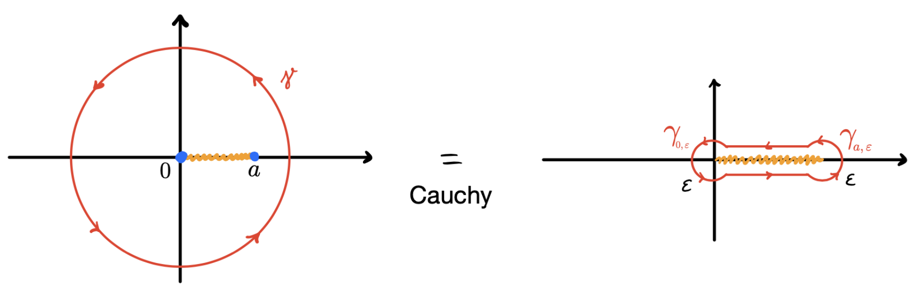
Rappresentiamo di seguito tagli dei logaritmi all'interno della funzione e della loro differenza:







Vediamo allora che $\log(z) - \log(z-a)$ ha punti di diramazione in $z = 0$ e $z = a$ e taglio sull'asse reale nell'intervallo tra 0 e a.
Scegliamo un cammino circolare γ attorno al taglio e usiamo Cauchy per deformare il cammino come in figura



Pertanto:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma F(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\epsilon^{a-\epsilon} dx(F_{sotto}(x) - F_{sopra}(x)) + \int_{\gamma_{0,\epsilon}} F(z)dz + \int_{\gamma_{a,\epsilon}} F(z)dz\right]$$

Verifichiamo che gli integrali attorno su γ_0 e γ_a vanno effettivamente a 0 per $\epsilon \to 0$

$$\left|\int_{\gamma_{0,\epsilon}} F(z)dz\right| \leq 2\pi\epsilon \underset{\gamma_{0,\epsilon}}{\text{Max}}\, |F(z)| \underset{\epsilon\to 0^+}{=} 2\pi\epsilon\Bigg[|\log(\epsilon)||f(0)| + \mathcal{O}\Bigg(\frac{1}{|\log(\epsilon)|^2}\Bigg)\Bigg] \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

$$\left|\int_{\gamma_{a,\epsilon}} F(z)dz\right| \leq 2\pi\epsilon \underset{\gamma_{a,\epsilon}}{\text{Max}}\, |F(z)| \underset{\epsilon\to 0^+}{=} 2\pi\epsilon\Bigg[|\log(\epsilon)||f(a)| + \mathcal{O}\Bigg(\frac{1}{|\log(\epsilon)|^2}\Bigg)\Bigg] \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Dunque prendendo il limite $\epsilon \to 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma F(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^a dx(F_{sotto}(x) - F_{sopra}(x))$$

Usando che

$$F_{sotto}(x) = \Bigg(\log\left|\frac{x}{x-a}\right| + i\pi\Bigg)f(x) \qquad F_{sopra}(x) = \Bigg(\log\left|\frac{x}{x-a}\right| - i\pi\Bigg)f(x)$$

$$\implies F_{sotto}(x) - F_{sopra}(x) = 2\pi i f(x)$$

Utilizzando tutte le informazioni appena ricavate possiamo concludere che

$$\frac{1}{2\pi i}\oint F(z)dz = \frac{1}{2\pi i}2\pi i\int_0^a dx f(x) = \int_0^a dx f(x)$$

III)

Posto $f(z) = z$ abbiamo che $F(z) = (\log(z) - \log(z-a))z$, usiamo il teorema esterno dei residui

$$\frac{1}{2\pi i}\oint F(z)dz = -\text{Res}_F(\infty)$$

dove non abbiamo alcuna singolarità sterna a γ. Ricordando che il residuo all'infinito è il coefficiente moltiplicativo di $1/z$ nello sviluppo per $z \to \infty$

$$F(z) = \left[\log(z) - \log\left(z\left(1 - \frac{a}{z}\right)\right)\right]z \underset{z\to\infty}{=} \left[\log(z) - \log(z) - \log\left(1 - \frac{a}{z}\right)\right]z$$

Nota: in generale in $\mathbb{C}$ non è valido sempre che $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ se usiamo il ramo principale in entrambi i membri.
Questo perché anche se i singoli logaritmi separatamente hanno parte immaginaria in $[-\pi, \pi]$, la somma delle parti immaginarie potrebbe essere fuori da questo intervallo.
Se però, come nel nostro caso, z_1 oppure z_2 sono molto vicini a 1, la parte immaginaria di log è infinitesima, quindi la somma non esce fuori da $[-\pi, \pi]$ e possiamo usare l'identità di sopra.

$$F(z) \underset{z\to\infty}{=} -\log\left(1 - \frac{a}{z}\right)z \underset{z\to\infty}{=} -\Bigg[-\frac{a}{z} - \frac{a^2}{z^2} + \mathcal{O}\Bigg(\frac{1}{z^3}\Bigg)\Bigg]z = a + \frac{a^2}{2z} + \mathcal{O}\Bigg(\frac{1}{z^2}\Bigg)$$

$$\implies \text{Res}_F(\infty) = -\frac{a^2}{2} \quad \implies \quad \frac{1}{2\pi i}\oint F(z)dz = \frac{a^2}{2}$$

che in effetti coincide con $\int_0^a x dx$.

ESERCIZIO 2

I)

Per mostrare che $\lim_{N\to\infty} T_N(t) = 1$ dobbiamo far vedere che, per una generica funzione test φ:

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ T_N(t)\varphi(t) \quad \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \varphi(t)$$

Questo è vero perché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \theta(N-|t|)\varphi(t) = \int_{-N}^{+N} dt\ \varphi(t) \quad \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \varphi(t) \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ converge quindi si fa il limite per $N\to\infty$.

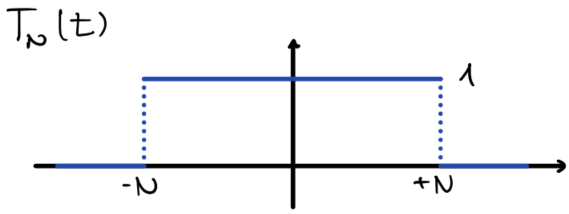
$$\mathcal{F}[T_N(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ \theta(N-|t|)e^{i\omega t} = \int_{-N}^{+N} dt e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega}(e^{i\omega N} - e^{-i\omega t}) = 2\frac{sin(\omega N)}{\omega}$$

che è una trasformata vista nelle lezioni in classe. L'integrale è stato possibile calcolarlo così perché $T_n(t)$ è anche in $L^1(\mathbb{R})$.
Prendendo $\mathcal{F}$ del limite trovato prima, abbiamo:

$$\lim_{N\to\infty} 2\frac{sin(\omega N)}{\omega} = \mathcal{F}[1](\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

II)

Disegniamo $T_N(t)$



e scriviamo:

$$\frac{d}{dt}T_N(t) = +\delta(t+N) - \delta(t-N)$$

dove i segni sono giustificati dal saltare da $0\to1$ in $-N$ nel primo caso e $1\to0$ in $+N$ nel secondo caso, com'è possibile dedurre dal disegno.
Posso anche calcolare usando la definizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\frac{d}{dt}T_N(t)\varphi(t) \underset{def}{\equiv} -\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ T_N(t)\frac{d\varphi}{dt}(t) = -\int_{-N}^{+N} dt\frac{d\varphi}{dt}(t) =$$

$$= -\varphi(N) + \varphi(-N) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt[-\delta(t-N) + \delta(t+N)]\varphi(t)$$

Prendendo la derivata di

$$\lim_{N\to+\infty} T_N(t) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{N\to\infty}[\delta(t-N) - \delta(t+N)] = 0 \qquad (*)$$

Verifichiamo questo limite nel senso delle distribuzioni. Dobbiamo mostrare che:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \qquad \lim_{N\to\infty} \int dt[\delta(t-N) - \delta(t+N)]\varphi(t) = 0$$

In effetti

$$\int dt[\delta(t-N) - \delta(t+N)]\varphi(t) = \varphi(-N) - \varphi(+N)$$

e φ è una funzione C^∞ a decrescenza rapida, quindi

$$\lim_{N\to+\infty} \varphi(N) = \lim_{N\to+\infty} \varphi(-N) = 0$$

Prendendo la trasformata di Fourier troviamo che

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{\tfrac{d}{dt}T_N(t)}(\omega) = 0$$

Possiamo calcolare la derivata di sopra in due modi:

1. $\widehat{[\delta(t-N) + \delta(t+N)]}(\omega) = \widehat{\delta(t-N)}(\omega) - \widehat{\delta(t+N)}(\omega) = e^{-i\omega N} - e^{i\omega N} = -2isin(N\omega)$
2. $-i\omega \cdot \widehat{T_N(t)}(\omega) = -i\omega \frac{2sin(N\omega)}{\omega} = -2isin(N\omega)$

Dunque abbiamo trovato

$$\lim_{N\to\infty} (-2i)sin(N\omega) = 0 \qquad \text{nel senso delle distribuzioni}$$

ESERCIZIO 3

I)

$$\left|\left| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right|\right|^2 = \int_{-T}^{+T} dt\big(|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2\big)$$

Se $f_1, f_2 \in L^2([-T,T])$, allora separatamente

$$\int |f_1(t)|^2 < \infty \qquad \int |f_2(t)|^2 < \infty$$

e quindi anche la loro somma è $< \infty$ e $\left|\left| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right|\right|^2 < \infty$.
Viceversa se impongo che

$$\left|\left| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right|\right|^2 < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int |f_1|^2 \leq \left|\left| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right|\right|^2 < \infty \quad , \quad \int |f_2|^2 \leq \left|\left| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right|\right|^2 < \infty$$

quindi $f_1, f_2 \in L^2([-T,T])$. Possiamo scrivere che

$$\left|\left| \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right|\right|^2 < \infty \iff f_1, f_2 \in L^2([-T,T])$$

Per mostrare che

$$\left\{ \begin{bmatrix} e^{(n)}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ e^{(n)}(t) \end{bmatrix} \right\}_{n\geq 1}$$

è completo, consideriamo $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ tale che:

$$\left(\begin{bmatrix} e^{(n)} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ e^{(n)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) = 0 \qquad \forall n \geq 1$$

Allora:

$$\left(\begin{bmatrix} e^{(n)} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ e^n(t)^* f_1(t) = (e^{(n)}, f_1)_{L^2([-T,T])}$$

dove se l'ultimo è 0 $\forall n \geq 1$, deve essere $f_1 = 0$ perché $\{e^n\}_{n\geq 1}$ è completo in $L^2([-T,T])$.
Analogamente:

$$0 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ e^{(n)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) \quad \forall n \geq 1 \implies f_2 = 0 \implies \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$$

da cui deduciamo che il sistema è completo.

II)

Partendo da

$$U \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(-t) \\ f_1(-t) \end{bmatrix}$$

notiamo che

$$U \begin{bmatrix} f_2(-t) \\ f_1(-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(+t) \\ f_2(+t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

quindi $U = U^{-1}$ dunque l'operatore è invertibile.
Per mostrare che è unitario, rimane da mostrare che preserva il prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \left(U \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, U \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) &= \int_{-T}^{+T} dt[g_2^*(-t) f_2(-t) + g_1^*(-t) f_1(-t)] \underset{t'=-t}{=} - \int_{+T}^{-T} dt'[g_2^*(t') f_2(t') + g_1^*(t') f_1(t')] \\ &= \int_{-T}^{+T} dt'[g_1^*(t') f_1(t') + g_2^*(t') f_2(t')] = \left(\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$