Es 1

I) $$f(z) = \frac{1}{z-w} \frac{1}{\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}} F(z)$$

Sia $F(z)$ che $\sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$ hanno un taglio sul segmento $[-1, 1]$ dell'asse reale quindi anche $f(z)$ ha questo taglio.

Inoltre $f(z)$ ha un polo semplice per $z=w$.

Visto che $F(z)$ è analitica fuori da $[-1, 1]$ non ci sono altre singolarità per z finito.

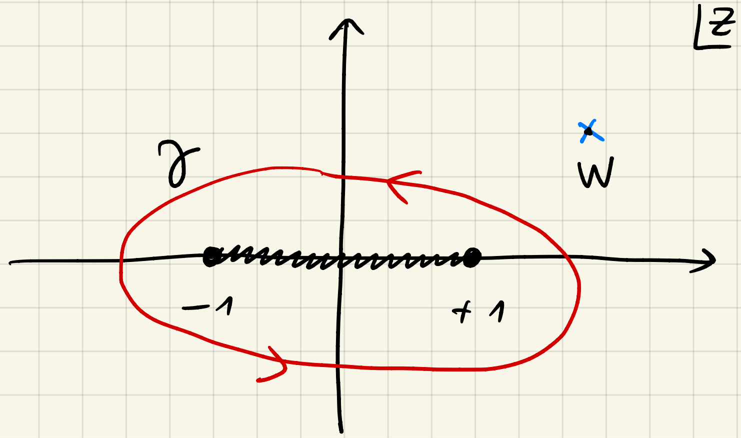
Per $z \to \infty$ i vari fattori si comportano come:

* $$\frac{1}{z-w} \underset{z\to\infty}{=} \frac{1}{z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$
* $$\sqrt{z-1}\sqrt{z+1} \underset{z\to\infty}{=} z\left(1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$$
* $$F(z) \underset{z\to\infty}{=} \frac{c}{z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

Quindi: $$f(z) \underset{z\to\infty}{=} \frac{c}{z^3}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

e f è regolare per $z \to \infty$.

II) Calcoliamo $\oint_\gamma f(z)\,dz$ in due modi



Modo 1: teorema esterno dei residui

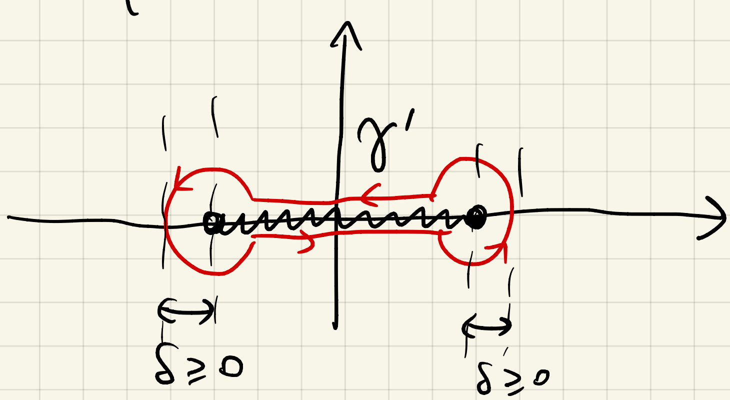
$$\oint_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i\, \mathrm{Res}_f(w) - 2\pi i\, \mathrm{Res}_f(\infty)$$

$$= -2\pi i \frac{1}{\sqrt{w-1}\sqrt{w+1}} F(w) - 2\pi i \cdot 0$$

per il calcolo visto prima $f(z)$ non ha potenza $1/z$ per $z \to \infty$ e quindi $\mathrm{Res}_f(\infty) = 0$.

Quindi: $$\oint_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i \frac{1}{\sqrt{w-1}\sqrt{w+1}} F(w)$$

Modo 2: deformiamo il cammino attorno al taglio



$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_{\gamma'} f(z)\,dz$$

Sopra il taglio abbiamo:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \sqrt{(x+i\epsilon)-1}\,\sqrt{(x+i\epsilon)+1} = i\sqrt{1-x^2}$$

mentre sotto:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \sqrt{(x-i\epsilon)-1}\,\sqrt{(x-i\epsilon)+1} = -i\sqrt{1-x^2}$$

Quindi: $f_{sopra}(x) = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+} f(x+i\epsilon)$

$$= \frac{1}{x-w}\,\frac{\lim_{\epsilon\to 0^+} F(x+i\epsilon)}{i\sqrt{1-x^2}} = -i\,\frac{1}{(x-w)\sqrt{1-x^2}}\lim_{\epsilon\to 0^+} F(x+i\epsilon)$$

$$f_{sotto}(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} f(x-i\epsilon)$$

$$= \frac{1}{x-w}\,\frac{\lim_{\epsilon\to 0^+} F(x-i\epsilon)}{-i\sqrt{1-x^2}} = +i\,\frac{1}{(x-w)\sqrt{1-x^2}}\lim_{\epsilon\to 0^+} F(x-i\epsilon)$$

$$\oint_{\gamma'} f(z)\,dz = \lim_{\delta\to 0^+}\Big[\int_{-\delta}^{+\delta} dx\,\big(f_{sotto}(x) - f_{sopra}(x)\big) + \int_{\gamma_{1,\delta}} dz\, f(z) + \int_{\gamma_{1,\delta}} dz\, f(z)\Big]$$

(per ipotesi F è limitata qui)

$$\Big|\int_{\gamma_{1,\delta}} dz\, f(z)\Big| \underset{\delta\to 0^+}{\leq} \Big(\underset{\gamma_{1,\delta}}{\mathrm{Max}}\,|F(z)|\Big)\left|\frac{1}{1-w}\right|\frac{1}{\sqrt{2}}\,2\pi\delta\frac{1}{\sqrt{\delta}}\big(1+O(\delta)\big) \xrightarrow[\delta\to 0^+]{} 0$$

Una stima analoga vale su $\gamma_{-1,\delta}$. Quindi:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = i\int_{-1}^{+1} dx \frac{1}{(x-w)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[F(x-i\epsilon)+F(x+i\epsilon)\right]$$

$$= i\int_{-1}^{+1} dx \frac{1}{(x-w)\sqrt{1-x^2}}\, \underset{\text{per ipotesi}}{x} = \underset{\text{integrale dato}}{\pi - \frac{\pi w}{\sqrt{w+1}\sqrt{w-1}}}$$

Quindi:

$$-2\pi i \frac{1}{\sqrt{w-1}\sqrt{w+1}} F(w) = \pi - \frac{\pi w}{\sqrt{w-1}\sqrt{w+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(w) = \frac{1}{2}\left(w - \sqrt{w-1}\sqrt{w+1}\right)}$$

Come check: $\sqrt{w-1}\sqrt{w+1} \underset{w\to\infty}{=} w\left(1+O\left(\frac{1}{w^2}\right)\right)$

$$\underset{w\to\infty}{=} w + O\left(\frac{1}{w}\right)$$

$$\Rightarrow F(w) \underset{w\to\infty}{=} \frac{1}{2}\left(w - w + O\left(\frac{1}{w}\right)\right) \underset{w\to\infty}{=} \frac{1}{2} O\left(\frac{1}{w}\right).$$

Per $x\in[-1,1]$ in effetti: $F(x+i\epsilon)+F(x-i\epsilon)$

$$= \frac{1}{2}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - i\sqrt{1-x^2}\right) = x.$$

Es 2

I) $$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n(t) c_n(x) + \beta_n(t) s_n(x) \right)$$

$$F(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(t) c_n(x) + B_n(t) s_n(x) \right)$$

$$\left.\begin{aligned} c_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{(n-1/2)\pi x}{L}\right) \\ s_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{s.o.c.} \\ \text{su } [-L, L] \end{array}$$

Sostituendo nell' equazione e usando:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} c_n(x) = -\left(\dfrac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2 c_n(x) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} s_n(x) = -\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 s_n(x) \end{cases}$$

abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\dot{\alpha}_n(t) - \left(\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2 \alpha_n(t) \right) c_n(x) \right.$$

$$\left. + \left(-\dot{\beta}_n(t) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \beta_n(t) \right) s_n(x) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n(t) c_n(x) + B_n(t) s_n(x) \right)$$

Visto che $\{c_n, s_n\}_{n\geq 1}$ sono un s.o.c., i coefficienti possono essere eguagliati (basta prendere il prodotto scalare con $\{C_m, S_m\}$) e otteniamo:

$$\begin{cases} -\dot{\alpha}_n(t) - \left(\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2 \alpha_n(t) = A_n(t) \\ -\dot{\beta}_n(t) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \beta_n(t) = B_n(t) \end{cases}, \quad \forall n \geq 1.$$

II) $F(t,x) = 0 \Rightarrow A_n(t), B_n(t) = 0, \ \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}_n(t) = -\left(\frac{(n-1/2)\pi}{L^2}\right)^2 \alpha_n(t) \\ \dot{\beta}_n(t) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \beta_n(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_n(t) = \alpha_n(0)\, e^{-\left(\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2 t} \\ \beta_n(t) = \beta_n(0)\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \end{cases}, \quad n \geq 1$$

La funzione $e^{-C_1 t}$ con $C_1 > 0$ non è a quadrato sommabile per $t \in \mathbb{R}$ perché diverge esponenzialmente per $t \to -\infty$. Quindi l'unica possibilità è: $\alpha_n(0) = \beta_n(0) = 0$

che implica: $\alpha_n(t) = \beta_n(t) = 0, \ \forall t, \ \forall n \geq 1$.

III) $F(t,x) = \delta(t)\,\delta(x)$

$$A_n(t) = \int_{-L}^{+L} dx\; c_n(x)\,\delta(t)\delta(x) = \delta(t)\,c_n(0)$$
$$= \delta(t)\frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$B_n(t) = \int_{-L}^{+L} dx\; s_n(x)\,\delta(t)\delta(x) = \delta(t)\,s_n(0) = 0.$$

Dunque l'equazione per $\alpha_n(t)$ è:

$$-\dot{\alpha}_n(t) - \left(\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2 \alpha_n(t) = \delta(t)\frac{1}{\sqrt{L}}$$

Applichiamo $\mathcal{F}$ e usiamo che:

$$\mathcal{F}[\dot{\alpha}_n](\omega) = -i\omega\,\mathcal{F}[\alpha_n](\omega) = -i\omega\,\widehat{\alpha_n}(\omega)$$

$$\Rightarrow \left(i\omega - \left(\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2\right)\hat{\alpha}_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

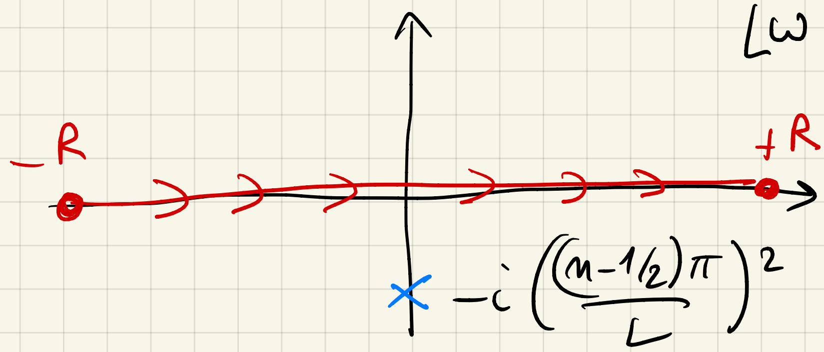
dove abbiamo usato che $\hat{\delta} = 1$.

$$\Rightarrow \quad \hat{\alpha}_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{L}}\;\frac{1}{i\omega - \left(\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2}$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{L}}\;\frac{1}{\omega + i\left(\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2}$$

Applichiamo l'antitrasformata:

$$\alpha_n(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega + i\left(\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2} \frac{-i}{\sqrt{L}} e^{-i\omega t}$$



$t>0$: chiudo nel semipiano inferiore e ricevo contributo dal polo

$t<0$: chiudo nel semipiano superiore e trovo 0

$$\Rightarrow \alpha_n(t) = \theta(t)\, 2\pi i \frac{-i}{\sqrt{L}} e^{-it\cdot\left(-i\left(\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{L}} \theta(t)\, e^{-\left(\frac{(n-1/2)\pi}{L}\right)^2 t}$$

Es 3 I) $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e^{(n)}$, $w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m e^{(m)}$

Verifichiamo che $(w, T(v)) = (T^\dagger(w), v)$:

$$(w, T(v)) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_m^* v_n \left(e^{(m)}, e^{(n)} - a_n e^{(1)}\right)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} w_m^* v_n (\delta_{mn} - a_n \delta_{m1})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} w_n^* v_n - w_1^* \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$$

$$(T^\dagger(w), v) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_m^* v_n (T^\dagger(e^{(m)}), e^{(n)})$$

$$= w_1^* \sum_{n=1}^{\infty} v_n (e^{(1)} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* e^{(n)}, e^{(n)})$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_m^* v_n (e^{(m)}, e^{(n)})$$

$$= w_1^* v_1 - w_1^* \sum_{n=1}^{\infty} v_n a_n + \sum_{n=2}^{\infty} w_n^* v_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} w_n^* v_n - w_1^* \sum_{n=1}^{\infty} v_n a_n$$

Perché $T^\dagger$ sia ben definito la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(n)}$$

deve convergere a un vettore nello spazio di Hilbert. Perché questo accada è necessario e sufficiente che $\{a_n\}_{n\geq 1}$ sia in ℓ^2, ovvero sia una successione a quadrato sommabile:

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty .$$

II) $T(v) = \lambda v \quad , \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e^{(n)}$

$$T(v) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left(e^{(n)} - a_n e^{(1)}\right)$$

$$= \left(v_1 - \sum_{n=1}^{\infty} v_n a_n\right) e^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} v_n e^{(n)}$$

$$\lambda v = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda v_n e^{(n)}$$

Eguagliando i coefficienti nel s.O.C.

$$\begin{cases} \lambda v_1 = v_1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n \\ \lambda v_n = v_n \quad , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Dall'equazione per $n \geq 2$ ci sono due possibilità:

$\nearrow$ $\lambda = 1$, v_n qualsiasi

$\searrow$ $v_n = 0 \quad \forall n \geq 2$, λ qualsiasi

Nel primo caso, dalla prima equazione abbiamo il vincolo:

$$\lambda = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n = 0$$

Nel secondo caso dalla prima equazione abbiamo:

$$\lambda v_1 = v_1 - a_1 v_1 = (1 - a_1) v_1$$

Deve essere $v_1 \neq 0$ in questo caso altrimenti v è $= 0$ e non è un autovettore. Quindi deve essere: $\lambda = 1 - a_1$.

Visto che $v_1 \neq 0$ e $v_n = 0 \ \forall n \geq 2$ in questo caso l'autovettore è: $v_1 e^{(1)}$.