Esercizi

1

Dati due parametri reali α e A, considera la funzione reale di due variabili reali x, y

$$u(x,y) = 1 + x^\alpha - A\,x\,y^2 \ .$$

Trova i valori di α e A tali che $u(x,y)$ sia la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$, ovvero affinchè

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \ ,$$

dove $v(x,y)$ è anche una funzione reale. Poi assumi che $f(0) = 1$ e determina anche la funzione $v(x,y)$, e dunque $f(z)$.

2

Dati due parametri reali a e b, considera le funzioni reali di due variabili reali x, y

$$u(x,y) = \frac{ab + bx}{(1+x)^2 + y^2} \ , \quad v(x,y) = -\frac{by}{(1+x)^2 + y^2} \ .$$

Trova il valore di a tale che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ siano la parte reale e immaginaria di una funzione olomorfa $f(z)$, ovvero affinchè

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \ .$$

Poi trova il valore di b affinchè valga che

$$\int_{\gamma_{(0,2)}} f(z) dz = 6\pi i \ ,$$

dove $\gamma_{(0,2)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine e di raggio 2, orientato in senso antiorario.

3

Considera

$$F(z) = \frac{z^3 \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{z^3 + 1} \ .$$

Elenca le singolarità di $F(z)$ (incluso eventualmente a $z = \infty$) e se sono isolate descrivine il tipo. Quindi calcola l'integrale

$$\int_{\gamma_{(0,2)}} dz\, F(z) \ ,$$

dove $\gamma_{(0,2)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 2, orientato in senso antiorario.

4

Considera

$$F(z) = \frac{z^3\left(\cosh\left(\frac{2\pi}{z}\right) - 1\right)}{z^2+1} \ .$$

Elenca le singolarità di $F(z)$ (incluso eventualmente a $z = \infty$) e se sono isolate descrivine il tipo. Quindi si calcoli l'integrale

$$\oint_{\gamma(0,\frac{1}{2})} F(z) \ ,$$

dove $\gamma(0, \frac{1}{2})$ è un cammino circolare centrato in $z = 0$ di raggio $\frac{1}{2}$, orientato in senso antiorario.

5

Calcola l'integrale

$$\int_{\gamma_{(0,1)}} dz\, e^{\frac{1}{z}} \frac{1}{1 - \sin\frac{1}{z}} \ ,$$

dove $\gamma_{(0,1)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 1, orientato in senso antiorario.

6

Calcola l'integrale

$$\int_{\gamma_{(0,1)}} dz\, \frac{z+1}{z^4(1 - \cos\frac{1}{z})} \ ,$$

dove $\gamma_{(0,1)}$ è il cammino circolare centrato nell'origine di raggio 1, orientato in senso antiorario.

7

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin(x)}{(x+i)^2} \ .$$

8

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(\cos z)^2}{z^2+1}.$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Usare $f(z)$ per calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{(\cos x)^2}{x^2+1} \ .$$

9

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(\sin z)^2}{z^2+3}.$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Usare $f(z)$ per calcolare l'integrale reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{(\sin x)^2}{x^2+3} \ .$$

10

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\log(z)}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2}.$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Spiegare in che modo $f(z)$ possa essere utilizzata per calcolare l'integrale reale

$$\int_0^{\infty} dx \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2} \ .$$

11

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{\log z}{\sqrt{z}\,(z+1)^2}.$$

Si elenchino le singolarità di $f(z)$, specificando se sono isolate, e se sono isolate specificandone il tipo. Spiegare in che modo $f(z)$ possa essere utilizzata per calcolare gli integrali reali

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)^2} \ , \quad \int_0^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)^2} \ .$$

12

Dato R numero reale positivo, definiamo $F(R)$ come il seguente integrale

$$F(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(0,R)} \frac{1}{e^z+1}\, dz \ ,$$

dove $\gamma(0,R)$ è un cammino circolare centrato nell'origine del piano complesso della variabile z, di raggio R, orientato in senso antiorario. Si disegni il grafico di $F(R)$.

13

Dato L numero reale positivo, definiamo $F(L)$ come

$$F(L) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma(L)} \frac{z}{\cosh(z)-1}\,dz - \int_{\gamma(-L)} \frac{z}{\cosh(z)-1}\,dz\right) \ ,$$

dove $\gamma(y)$ è un cammino dato dalla retta parallela all'asse x con ordinata costante y, percorsa da $x=-\infty$ a $x=+\infty$. Si disegni il grafico di $F(L)$.

14

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} \ .$$

15

Si calcoli l'integrale

$$I(a) = \int_0^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+a)} \ ,$$

come funzione del parametro reale $a > 0$.

16

Si calcoli l'integrale

$$I(a) = \int_0^1 dx \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x^2+(1-a)x-a}$$

come funzione del parametro reale $a > 1$.

17

Si calcoli l'integrale

$$I(a) = \int_1^{+\infty} dx \frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x^2-a^2)}$$

come funzione del parametro reale a che soddisfa $-1 < a < 1$.

18

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin(x)\cos(ax)}{x}$$

come funzione del parametro reale a.

Soluzioni

11

Le singolarità sono: punto di diramazione in $z = 0$ e $z = \infty$, e una singolarità isolata in $z = -1$, che è un polo di ordine 2. Per calcolare gli integrali richiesti, consideriamo sia per la radice che per il logaritmo un taglio lungo l'asse reale positivo. In questo modo la funzione sopra o sotto il taglio, nel punto $z = x \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, vale

$$f_{\text{sopra}} = \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)^2} \ , \quad f_{\text{sotto}} = -\frac{\log x + 2\pi i}{\sqrt{x}(x+1)^2} \ .$$

Consideriamo dunque l'integrale di $f(z)$ su un cammino γ composto da: segmento sopra il taglio da $0 < \epsilon < 1$ a $R > 1$, segmento sotto il taglio da R a ϵ, cerchio di raggio R in senso antiorario, cerchio di raggio ϵ in senso orario. Per qualsiasi ϵ e R nei range indicati, questo integrale è calcolabile usando il teorema dei residui come

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i \mathrm{Res}_f(-1) = 2\pi i\ \frac{d}{dz}\frac{\log z}{\sqrt{z}}\bigg|_{z=-1} = 2\pi i \left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - \frac{\log z}{2z\sqrt{z}}\right)\bigg|_{z=-1} = 2\pi\left(-1 + \frac{\pi i}{2}\right) \ .$$

Prendiamo poi il limite $\epsilon \to 0^+$ e $R \to +\infty$. Il massimo $\mathrm{Max}|f(z)|$ sul cerchio di raggio ϵ nel limite va come $|\log \epsilon|/\sqrt{\epsilon}$, che moltiplicato per la lunghezza del cammino $2\pi\epsilon$ va a zero, dunque l'integrale su questo arco tende a zero per $\epsilon \to 0^+$. Similmente, il massimo $\mathrm{Max}|f(z)|$ sul cerchio di raggio R nel limite va come $|\log R|/R^{\frac{5}{2}}$, che moltiplicato per la lunghezza del cammino $2\pi R$ va a zero, quindi anche il contributo di questo arco tende a zero per $R \to +\infty$. Pertanto abbiamo

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{R\to+\infty}\oint_\gamma dz\, f(z) = \int_0^{+\infty} dx\, \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)^2} - \int_{+\infty}^0 dx\, \frac{\log x + 2\pi i}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \int_0^{+\infty} dx\, \frac{2\log x + 2\pi i}{\sqrt{x}(x+1)^2} \ .$$

Comparing with the previous calculation of $\oint_\gamma dz\, f(z)$ and taking the real and imaginary part we obtain

$$\int_0^{+\infty} dx\, \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+1)^2} = -\pi \ , \quad \int_0^{+\infty} dx\, \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{\pi}{2} \ .$$

14

Detto I l'integrale da calcolare, notiamo che converge vicino a $x = 0$ perché il numeratore va come x^4 e quindi compensa la divergenza del denominatore. D'altra parte, per calcolare questo integrale usando il Lemma di Jordan, vorremmo riscrivere il coseno in termini dell'esponenziale complesso. La funzione $e^{ix} - 1 + \frac{x^2}{2}$ però vicino all'origine si comporta diversamente perché c'è anche un termine lineare ix nello sviluppo di Taylor dell'esponenziale. Per ovviare a questo problema, riscriviamo il coseno usando la formula di Eulero, e aggiungiamo e sottraiamo il termine ix nello sviluppo dell'esponenziale

$$\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1}{2}\frac{e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}}{x^4} + \frac{1}{2}\frac{e^{-ix} - 1 + ix + \frac{x^2}{2}}{x^4} \ .$$

I due addendi così ottenuti sono funzioni su cui possiamo applicare il lemma di Jordan, e si comportano come $1/x$ vicino a $x = 0$, per cui hanno una singolarità che possiamo regolarizzare con la parte principale di Cauchy. Otteniamo dunque

$$I = \frac{1}{2}P\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}}{x^4} + \frac{1}{2}P\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{-ix} - 1 + ix + \frac{x^2}{2}}{x^4} \ .$$

Per il primo integrale, il lemma di Jordan ci permette di chiudere il cammino con un arco nel semipiano superiore, e visto che abbiamo la parte principale aggiungiamo e sottraiamo anche un arco dato da un semicerchio di raggio ϵ in senso orario attorno all'origine. L'integrale sul cammino chiuso dà zero visto che non ci sono singolarità all'interno, e dunque l'integrale sull'asse reale è pari all'opposto dell'integrale sull'arco di raggio ϵ, ovvero

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}}{x^4} = -(-\pi i)\,\mathrm{Res}_{\frac{e^{iz}-1-iz+\frac{z^2}{2}}{z^4}}(0) = -(-\pi i)\frac{i^3}{6} = \frac{\pi}{6} \ .$$

Qui abbiamo usato che essendoci un polo di ordine 1 in $z = 0$, l'integrale sulla semicirconferenza di raggio ϵ nel limite $\epsilon \to 0$ dà $\pm\pi i$ per il residuo. In questo caso abbiamo il segno meno per l'orientazione in senso orario.

Similmente per il secondo integrale il lemma di Jordan ci permette di chiudere il cammino nel semipiano inferiore, e anche l'arco di raggio ϵ dunque verrà preso nel semipiano inferiore. Pertanto con lo stesso ragionamento otteniamo

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{-ix} - 1 + ix + \frac{x^2}{2}}{x^4} = -(\pi i)\,\mathrm{Res}_{\frac{e^{-iz}-1+iz+\frac{z^2}{2}}{z^4}}(0) = -(\pi i)\frac{(-i)^3}{6} = \frac{\pi}{6} \ .$$

Pertanto sommando i due contributi troviamo $I = \frac{\pi}{6}$.