

1

Considera una funzione $G(t) \in L^2(\mathbb{R})$ tale che valga anche $\frac{dG(t)}{dt} \in L^2(\mathbb{R})$. Trova la costante A tale che valga l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\frac{dG(t)}{dt} \right)^2 = A \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^2 \hat{G}(-\omega) \hat{G}(\omega) ,$$

dove \hat{G} è la trasformata di Fourier di G .

2

Risolvi l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t') g(t - t') = \frac{T}{\pi} \frac{1}{t^2 + T^2} ,$$

per la funzione $g(t)$ usando la trasformata di Fourier e ricordando che

$$\mathcal{F} \left[\frac{T}{\pi} \frac{1}{t^2 + T^2} \right] (\omega) = e^{-T|\omega|} .$$

3

Considera l'equazione

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t') e^{-\frac{\pi(t-t')^2}{T^2}} = -g(t) + e^{-\frac{\pi t^2}{T^2}} ,$$

per la funzione $g(t)$. Ricordando che

$$\mathcal{F} \left[e^{-\frac{\pi t^2}{T^2}} \right] (\omega) = T e^{-\frac{T^2 \omega^2}{4\pi}} .$$

usa l'equazione per determinare la trasformata $\hat{g}(\omega)$. Deduci dalla forma di $\hat{g}(\omega)$ che $g(t)$ è derivabile infinite volte.

4

È data una funzione $G(t)$ che soddisfa l'equazione lineare di ordine N

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n G(t)}{dt^n} = \delta(t) ,$$

dove $\delta(t)$ è la delta di Dirac, e gli a_n sono coefficienti complessi con $a_N \neq 0$. Si determini il comportamento della trasformata di Fourier $\hat{G}(\omega)$ per $\omega \rightarrow \infty$. Guardando $\hat{G}(\omega)$ come funzione meromorfa di $\omega \in \mathbb{C}$ per quale valore di N essa ha residuo non nullo all'infinito?

5

Si consideri la funzione seguente funzione in $L^2(\mathbb{R})$

$$F(t) = t e^{-t^2} .$$

Tale funzione soddisfa l'equazione

$$tF'(t) = F(t) - 2t^2F(t) .$$

Si usi questa equazione per derivare un'equazione differenziale per la trasformata $\hat{F}(\omega)$. Poi si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{F}(\omega)$ e si verifichi che risolve l'equazione differenziale trovata.

6

Data $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$ indica lo spazio di Schwarz delle funzioni a decrescenza rapida) si mostri che vale l'identità

$$\int_0^{+\infty} dt(F(t) - F(-t)) = -\frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{\omega} \hat{F}(\omega) ,$$

dove \mathcal{P} indica la parte principale (che serve a regolarizzare la divergenza dell'integrale in $\omega = 0$) e \hat{F} è la trasformata di Fourier di F . Si discuta se i due integrali al membro destro e sinistro dell'uguaglianza siano ben definiti anche per $F \in L^2(\mathbb{R})$ o $F \in L^1(\mathbb{R})$.

7

Considera $F(t, x)$ che soddisfa l'equazione del calore

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} ,$$

dove D è un coefficiente reale positivo, con condizione iniziale $F(0, x) = f(x)$. Determina l'equazione e la condizione iniziale soddisfatta da $\hat{F}(t, k)$, ovvero dalla trasformata di Fourier di F rispetto alla variabile x . Poi risolvi l'equazione per $\hat{F}(t, k)$ con la condizione iniziale trovata. Infine usando l'antitrasformata mostra che

$$F(t, x) = \int dx' G(t, x - x') f(x') ,$$

dove

$$G(t, x - x') = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-Dk^2 t} e^{ik(x-x')} = \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}}}{2\sqrt{\pi Dt}} .$$

8

Si consideri la funzione di variabile reale

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

Si discuta in che senso sia possibile definirne la trasformata di Fourier. Dando per buono che la trasformata di Fourier è

$$\frac{C}{\sqrt{|k|}},$$

in che modo si può fissare la costante C senza calcolare esplicitamente la trasformata?

9

Si consideri la funzione della variabile reale x

$$e^{-\epsilon|x|} \frac{1}{\sqrt{|x|}},$$

dove $\epsilon > 0$ è un parametro positivo. Se ne calcoli la trasformata di Fourier (è conveniente usare il cambio di variabili $x = s_+^2$ per $x > 0$ e $x = -s_-^2$ per $x < 0$). Si spieghi come utilizzare questo risultato per ottenere la trasformata di Fourier di

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

10

Il seguente argomento porta a una contraddizione:

- Vale che: $\frac{d}{dt} \arctan(1/t) = \frac{1}{1+1/t^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{1}{1+t^2}$;
- Prendendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri, e usando la proprietà della trasformata della derivata, troviamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} \arctan(1/t) \right] (\omega) &= -i\omega \mathcal{F} [\arctan(1/t)] (\omega) \\ \mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right] (\omega) &= \pi e^{-|\omega|} \\ \implies \mathcal{F} [\arctan(1/t)] (\omega) &= -i \frac{\pi e^{-|\omega|}}{\omega} ; \end{aligned}$$

- $\arctan(1/t)$ va come $1/t$ per $t \rightarrow \pm\infty$, ed è una funzione limitata per tutti gli altri valori di t , dunque è in $L^2(\mathbb{R})$. Pertanto la sua trasformata di Fourier deve anch'essa essere in $L^2(\mathbb{R})$;
- la funzione $-i\frac{\pi e^{-|\omega|}}{\omega}$ va come $1/\omega$ per $\omega \rightarrow 0$, dunque non è in $L^2(\mathbb{R})$.

Trova l'errore e risolvi l'apparente paradosso. [*Suggerimento:* Guarda come si comporta la funzione $\arctan(1/t)$ vicino a $t = 0$. Riesamina alla luce di questo il calcolo della sua derivata.]

11

Si consideri la funzione speciale *seno integrale*, che si indica con Si ed è definita da

$$\text{Si}(t) = \int_0^t dt' \frac{\sin(t')}{t'}$$

Ricordando che la trasformata di Fourier di $\sin t/t$ è data da $\pi\theta(1-|\omega|)$, dove θ indica la funzione θ di Heaviside, si mostri che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\text{Si}(t)^2}{t^2} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{+1} d\omega \log(|\omega|)^2$$

[*Suggerimento:* Nota che, detta $f(t) = \frac{\text{Si}(t)}{t}$, vale che $\frac{d}{dt}(tf(t)) = \sin t/t$. Quindi...]

12

Si consideri l'equazione integrale per la funzione $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t')f(t') + H(t)$$

dove $G(t)$ e $H(t)$ sono funzioni date. Si determini $\hat{f}(\omega)$ in funzione di $\hat{G}(\omega)$ e $\hat{H}(\omega)$. Si consideri poi il caso particolare in cui

$$G(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad H(t) = \frac{2}{4+t^2} - \frac{3}{9+t^2}$$

Si usi la soluzione per $\hat{f}(\omega)$ per calcolare l'integrale

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} f(t)$$

dove α è un numero reale > 0 .