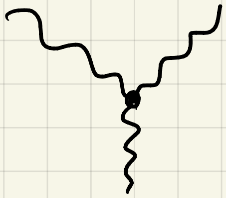
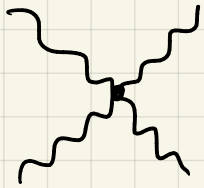
Vertici:

 $= g(\ldots)$

 $= g^2(\ldots)$

vedi II-2 di Donoghue

* Nota:

→ per l'$U(1)$ $f^{abc} = 0$ e non ci sono self-interazioni

→ essendoci tre fattori nel gruppo, abbiamo tre costanti di accoppiamento: g_1, g_2, g_3

$$\mathcal{L}_{\text{fermioni}} = \sum_{\psi_L} i \bar{\psi}_L^i \gamma^\mu D_\mu^{ij} \psi_L^j + \sum_{\psi_R} i \bar{\psi}_R^i \gamma^\mu D_\mu^{ij} \psi_R^j$$

tutti i fermioni Left-moving ; tutti i Right-moving

$$D_\mu^{ij} = \left(\partial_\mu + i g_1 \frac{Y}{2} B_\mu\right) \delta^{ij}$$
$$+ i g_2 \left[\rho_2(T_2^a)\right]^{ij} W_\mu^a$$
$$+ i g_3 \left[\rho_3(T_3^a)\right]^{ij} A_\mu^a$$

B_μ → campo di gauge $U(1)$

W_μ^a → campo di gauge $SU(2)$

A_μ^a → campo di gauge $SU(3)$

Y : carica sotto $U(1)$; $\rho_{2,3}$: rappresentazione di $SU(2)$ / $SU(3)$

PARENTESI SU RAPPRESENTAZIONI

In generale "rappresentare" significa trovare matrici $\rho(T^a)$ che agiscono su qualche spazio vettoriale V (il fermione ha valore in questo spazio) e soddisfano le relazioni di commutazione:

$$[\rho(T^a), \rho(T^b)] = i f^{abc} \rho(T^c)$$

Esprimono come l'oggetto che ha valore in V (in questo caso lo spinore) trasforma sotto il gruppo:

$$V \ni v \xmapsto[U \in G]{} v' = \rho(U) v$$
$$= e^{-i\omega^a \rho(T^a)} v$$
$$\approx (1 - i\omega^a \rho(T^a) + \dots) v$$

Dunque sotto $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ i fermioni trasformano:

$$\psi^i_{L/R} \longmapsto \psi'^i_{L,R} = \left[e^{-i\left(\omega_1 \frac{Y}{2} + \omega_2^a \rho_2(T_2^a) + \omega_3^a \rho_3(T_3^a)\right)} \right]^{ij} \times \psi^j_{L,R}$$

Le uniche ρ che entrano sono:

* rappresentazione <u>triviale</u>: $\rho = 0$, indichiamo con $\underline{0}$
* rappresentazione <u>fondamentale</u>:

$\rho_2(T_2^a) = \frac{\tau^a}{2}$ indichiamo con $\underline{2}$

$\rho_3(T_3^a) = \frac{\lambda^a}{2}$ indichiamo con $\underline{3}$

dimensioni di V su cui agiscono

$*$ anti-fondamentale :

$\rho_2(T_2^a) = \left(\frac{\tau^a}{2}\right)^* = (i\tau^2)\left(\frac{\tau^a}{2}\right)(i\tau^2)^{-1}$ $\underline{2}^*$ equivalente a $\underline{2}$

$\rho_3(T_3^a) = \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^*$ $\underline{3}^*$

Azione invariante sotto trasformazioni locali/di gauge con $\omega_{1,2,3}$ funzioni di x.

La derivata covariante ha la proprietà:

$$(D_\mu \psi_{L/R})^i \longmapsto (D_\mu \psi'_{L,R})^i = \underbrace{[\;\dots\;]^{ij}}_{\text{stessa matrice che trasforma } \psi_{L,R}} \psi_{L,R}^j$$

[Verifica per esercizio]

Fermioni Left & Right moving:

$$P_{\substack{L\\R}} \psi_{\substack{L\\R}} = \psi_{\substack{L\\R}}, \quad P_{\substack{R\\L}} \psi_{\substack{L\\R}} = 0$$

$$P_{\substack{L\\R}} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$$ $\rightsquigarrow$ la rappresentazione di Lorentz di un fermione di Dirac è riducibile, L e R sono le due rappresentazioni irriducibili: fermione di Weyl.

Nota che scrivendo un fermione di Dirac in componenti: $\psi = \psi_L + \psi_R$

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_R \end{pmatrix}$$

nella scelta di γ-matrices per cui: $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & -1\!\!1 \end{pmatrix}$

Sostituendo nella Lagrangiana:

$$i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi + M\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}_L\partial_\mu\gamma^\mu\psi_L$$
$$+ i\bar{\psi}_R\partial_\mu\gamma^\mu\psi_R + \underbrace{M(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)}$$

per scrivere il termine di massa servono entrambe le componenti!

PARENTESI SU ELICITÀ

Si chiamano L & R moving perché nel limite $M \to 0$ sono autovalori dell'elicità:

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} = 0$$

$m \to 0$: $\quad i\sigma^\mu\partial_\mu\chi_R = 0 \Rightarrow (E - \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi_R = 0$

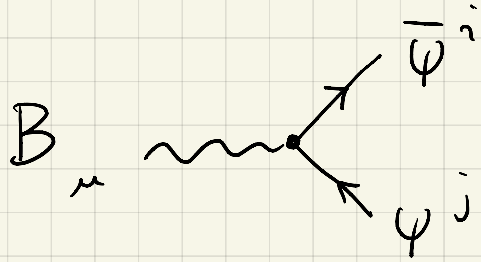
$\quad\quad\quad\quad i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_L = 0 \Rightarrow (E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi_L = 0$

$E = |\vec{p}|$, autovettori con autovalore $\pm\frac{1}{2}$ di $h = \dfrac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$

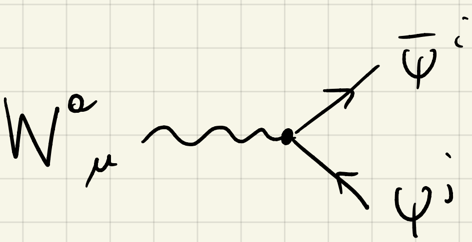
Espandendo $i\bar{\psi}^i \gamma^\mu D_\mu^{ij} \psi^j$ vediamo le interazioni tra materie e campi di gauge:

$$\underbrace{i\bar{\psi}^i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^i}_{\text{cinetica}} \underbrace{- g_1 \frac{Y}{2} B_\mu \bar{\psi}^i \gamma^\mu \psi^i - g_2 W^a_\mu \rho_2(T_2^a)_{ij} \bar{\psi}^i \gamma^\mu \psi^j - g_3 A^a_\mu \rho_3(T_3^a)_{ij} \bar{\psi}^i \gamma^\mu \psi^j}_{\text{interazione cubica}}$$

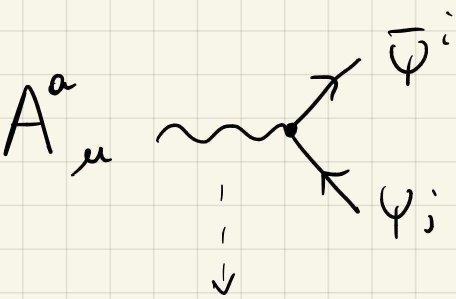
Vertice:



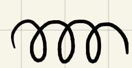
$$= -i g_1 \frac{Y}{2} \delta^{ij} \gamma^\mu$$



$$= -i g_2 \rho_2(T_2^a)^{ij} \gamma^\mu$$



$$= -i g_3 \rho_2(T_3^a)^{ij} \gamma^\mu$$

a volte per distinguere: 

Lista dei fermioni e loro rappresentazioni:

	SU(3)	SU(2)	U(1)(=Y)
$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$1/3$
$l_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	-1
u_R	$\underline{3}$	$\underline{0}$	$4/3$
d_R	$\underline{3}$	$\underline{0}$	$-2/3$
e_R	$\underline{0}$	$\underline{0}$	-2
" ν_R	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0 "

→ non sappiamo se esiste, si può usare per scrivere le masse dei neutrini nel modo che vedremo

Questa struttura si ripete identica per le altre 2 "generazioni":

$$\vec{q}_L = \left(\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \right) \qquad \vec{u}_R = (u_R \; c_R \; t_R)$$

$$\vec{d}_R = (d_R \; s_R \; b_R)$$

$$\vec{l}_L = \left(\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \right) \qquad \vec{e}_R = (e_R \; \mu_R \; \tau_R)$$

* Nota

→ le interazioni forti (ovvero $SU(3)$) hanno per ogni fermione L un fermione R nella stessa rappresentazione; $SU(2) \times U(1)$ invece NO: solo i L carichi sotto $SU(2)$.

Visto che trasformazione di Parità: $\vec{x} \mapsto -\vec{x}$ scambia L e R, questo vuol dire che le interazioni forti da sole preserverebbero la parità, ma il Modello Standard NON ha la parità come simmetria, perché le interazioni deboli la rompono;

→ visto che scrivere una massa per i fermioni richiede sia L che R, per avere una massa compatibile con invarianza di gauge servirebbero L e R nella stessa rappresentazione. Questo non è possibile per quanto abbiamo detto riguardo $SU(2) \times U(1)$. Senza Higgs i fermioni sarebbero costretti a essere massless!

→ per ricordare Y usa la formula:

$$Y = 2\left(Q - T_2^3\right)$$ ⇝ vedremo perché discutendo Higgs

e.g. $u_L : 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$, $d_L : 2\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$