LEZIONE 2:

Continuiamo il ripasso sulla definizione del Modello Standard:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{fermioni}}_{\text{visti le volte scorse}} + \mathcal{L}_{Higgs}$$

- $$\mathcal{L}_{Higgs} = \mathcal{L}_{Higgs-gauge} + \mathcal{L}_{Higgs-fermioni}$$

$$\mathcal{L}_{Higgs-gauge} = (D^\mu \Phi)^\dagger D_\mu \Phi - V(\Phi)$$

Φ scalare complesso nella $\underline{2}$ di $SU(2)$ e carica $Y = 1$ sotto $U(1)$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$$

$+, 0$ indicano Q elettrica, ricorda:

$$Y = 2(Q - T_2^{a=3})$$

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu + i \frac{g_1}{2} B_\mu + i \frac{g_2}{2} W_\mu^a \tau^a\right)\Phi$$

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad \mu^2, \lambda \geq 0$$

Per scrivere la parte con i fermioni, consideriamo dapprima il caso con una sola generazione:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs-fermioni}} = -g_u\,\bar{q}_L\,\tilde{\Phi}\,u_R$$

$$-g_d\,\bar{q}_L\,\Phi\,d_R$$

accoppiamenti di Yukawa: "$\varphi\bar{\psi}\psi$"

$$\text{"}-g_\nu\,\bar{\ell}_L\,\tilde{\Phi}\,\nu_{eR}\text{"} \rightsquigarrow \text{ipotetico}$$

$$-g_e\,\underbrace{\bar{\ell}_L\,\Phi}\,e_R \;+\; \text{c.c.}$$

↳ e.g.: $-g_u^*\,\bar{u}_R\,\tilde{\Phi}^\dagger q_L$

contrazione tra doppietti di $SU(2)$:

$$V^\dagger W = \begin{pmatrix} V_1^* & V_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$$

$$= V_1^* W_1 + V_2^* W_2 \quad \text{invariante sotto } SU(2).$$

Definizione: $\tilde{\Phi} = (i\tau_2)\,\Phi^*$ è sempre nella $\underline{2}$ di $SU(2)$, perché $\underline{2}^*$ è equivalente a $\underline{2}$ tramite $i\tau_2$, ma ha carica opposta sotto $U(1)$.

Le interazioni scritte sopra sono le uniche con operatori di dimensione ≤ 4 e compatibili con invarianza sotto trasformazioni di gauge

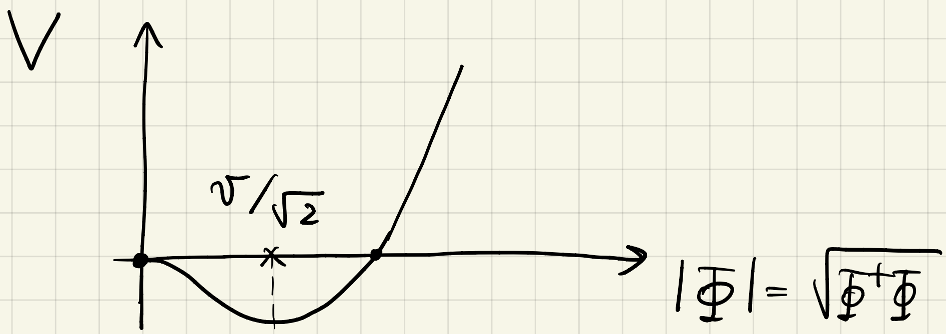
[Verifica invarianza dei termini di Yukawa]

Fenomeno di Higgs: $SU(2) \times U(1) \to U(1)_{e.m.}$

rottura spontanea

Potenziale: $\lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \text{costante}$

con $\lambda v^2 = \mu^2$



Il vuoto della teoria corrisponde al minimo del potenziale: $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle = v^2/2$

Φ stesso ha due componenti complesse, dobbiamo prendere un valore che dia il corretto $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$, a meno di trasformazioni di $SU(2) \times U(1)$ possiamo prendere:

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{questa componente ha carica } 0$$

$\Rightarrow$ il vuoto/minimo del potenziale NON è invariante sotto $SU(2) \times U(1)$ ma solo sotto $U(1)_{e.m.}$

In altre parole $T_2^{a=1,2}\langle\Phi\rangle \neq 0$, generatori rotti;

anche $T_2^3\langle\Phi\rangle \neq 0$ ma è $= -\frac{1}{2}\langle\Phi\rangle$ quindi possiamo fare una combinazione con: $Y\langle\Phi\rangle = \langle\Phi\rangle$ in modo da trovare un generatore non rotto:

$$Q \equiv \frac{Y}{2} + T_2^3 \,, \qquad Q\langle\Phi\rangle = 0 .$$

Nota che tutte le scelte possibili sono collegate da $SU(2)\times U(1)$ quindi sono fisicamente equivalenti. Con una scelta diversa di $\langle\Phi\rangle$ con $\langle\Phi^\dagger\Phi\rangle = v^2/2$, avremmo solo un diverso generatore di $SU(2)$ che compensa la trasformazione di $U(1)$. Per comodità abbiamo scelto il generatore diagonale T_2^3.

Sostituendo $\langle\Phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ all'interno di $\mathcal{L}_{\text{Higgs-gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs-fermion}}$ troviamo: (assumiamo $g_{u,d,e} = g_{u,d,e}^*$)

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{v}{\sqrt{2}}\left(g_u \bar{u}u + g_d \bar{d}d + g_e \bar{e}e\right)$$

$$+ \left(\frac{v g_2}{2}\right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

dove: $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L$

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 \mp i W_\mu^2\right)$$

[verifica per esercizio]

Da $\mathcal{L}_{mass}$ leggiamo:

* masse dei fermioni: $\boxed{m_{\star} = \frac{v}{\sqrt{2}} g_{\star}}$

$\star = u, d, e$

linearmente proporzionale al coupling di Yukawa.

* massa del bosone carico W_μ : $\boxed{M_W = \frac{v}{2} g_2}$

* massa del bosone neutro Z_μ :

dobbiamo diagonalizzare: $\begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

la rotazione diagonalizza se prendiamo:

$$\tan\theta_W = \frac{g_1}{g_2} \quad \underline{\text{angolo di Weinberg}}$$

$$\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{g_1^2+g_2^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_\gamma = 0 \quad , \quad \boxed{M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g_1^2+g_2^2} = \frac{v}{2} g_2 \frac{1}{\cos\theta_W}}$$

A_μ è il fotone massless e Z_μ il bosone massivo neutro. Nota che: $$\frac{M_W}{M_Z} = \cos\theta_W .$$

È interessante riscrivere le interazioni con i fermioni in termini dei campi di gauge autostati di massa. L'interazione si scrive:

$$\mathcal{L}_{int} = -g_2 \left(W^+_\mu J_W^{-\mu} + W^-_\mu J_W^{+\mu} \right)$$
$$- g_2 W^3_\mu J_W^{3\mu} - g_1 B_\mu \underbrace{\left(J^\mu_{em} - J_W^{3\mu} \right)}_{1/2\, J^\mu_Y}$$

dove stiamo usando: $W^a_\mu J^a_W = W^+_\mu J_W^{-\mu} + W^-_\mu J_W^{+\mu} + W^3_\mu J_W^{3\mu}$

$$J^\pm_W = \frac{J^1 \mp i J^2}{\sqrt{2}}$$

$$J_W^{a\mu} = \sum_{\psi_L} \overline{\psi}_L \frac{\tau^a}{2} \gamma^\mu \psi_L$$

Calcolando $J_W^{-\mu}$ si trova, considerando per semplicità una sola generazione:

$$J_W^{-\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\nu}_L \gamma^\mu e_L + \overline{u}_L \gamma^\mu d_L \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{\nu}_L \gamma^\mu \frac{1\!\!1 + \gamma^5}{2} e + \overline{u} \gamma^\mu \frac{1\!\!1 + \gamma^5}{2} d \right)$$