TEORIE di GAUGE NON-ABELIANE

Prendiamo una teoria inv. sotto una trasf. globale data da un gruppo di Lie G semplice (semi-semplice)

Prendiamo un campo φ che trasf. sotto G $\rightarrow$ $\varphi(x)$ è in una RAPP. R, cioè è un campo a valori in V_R (sezione del fib. vett. con fibra $E_x \simeq V_R$)

Es: $G = SU(2)$ $\quad R = \underline{2}$

$\varphi \in V_R \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$

Se φ è "uno scalare nella rap. $\underline{2}$" vuol dire che φ_1 e φ_2 sono scalari

(φ prende valori in $V_R \otimes V_{\Gamma_{Lorentz}}$)

prodotto tensore di sp. di rep. di gruppi diversi

Lagrangiana invariante (φ scalare $\mathbb{C}$)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi_1^* \partial^\mu \varphi_1 + \partial_\mu \varphi_2^* \partial^\mu \varphi_2 - m^2|\varphi_1|^2 - m^2|\varphi_2|^2$$

$$= \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \underbrace{\varphi^\dagger}_{\bar{N}} \underbrace{\varphi}_{N}$$

vale anche per $SU(N)$

$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus Adj$

c'è singoletto

qta forma rende $\mathcal{L}$ manifestam. invariante

$$\xrightarrow[U \in SU(2)]{} \partial_\mu \varphi^\dagger U^\dagger U \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger U^\dagger U \varphi = \mathcal{L}$$

Ora abbiamo

$\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ invariante sotto $\varphi \mapsto U\varphi$ e $\partial\varphi \mapsto U\partial\varphi$ (U matrice costante)

$U \in G \qquad U = e^{-i\alpha^a t^a_R}$

cioè $\mathcal{L}(U\varphi, U\partial\varphi) = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$

φ trasforma in rep. R

Passiamo a trasf. locali (di gauge)

$$U \rightsquigarrow U(x) = e^{-i\alpha^a(x) t^a_R}$$

$\partial_\mu \varphi$ non trasforma più come $U \partial_\mu \varphi$

$$\partial_\mu \varphi \mapsto \partial_\mu (U\varphi) = \underline{(\partial_\mu U)\varphi} + U\partial_\mu \varphi$$

Introduciamo la DERIVATA COVARIANTE (vorremo che $D\varphi \mapsto U D\varphi$)

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu + i A_\mu)\varphi$$

matrice

analogo in GR: $D_\mu v^\rho = \partial_\mu v^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} v^\nu$

matrice con indici $\rho\nu$

$$(D_\mu \varphi)_i = \partial_\mu \varphi_i + i (A_\mu)_i{}^j \varphi_j$$

A_μ è definita in modo tale che

$$D_\mu \varphi \mapsto U D_\mu \varphi .$$

$$D_\mu \varphi \mapsto (\partial_\mu + i A'_\mu)\varphi' = (\partial_\mu + i A'_\mu) U\varphi =$$

$$= (\partial_\mu U)\varphi + \underline{U\partial_\mu \varphi} + i A'_\mu U \varphi$$
$$+ \underline{i U A_\mu \varphi} - i U A_\mu \varphi$$

$$= \underline{U D_\mu \varphi} + (\partial_\mu U + i A'_\mu U - i U A_\mu)\varphi$$

$\Rightarrow$ Otteniamo $D_\mu \varphi \mapsto U D_\mu \varphi$ se

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + i (\partial_\mu U) U^{-1}$$

$[= -i U \partial_\mu U^{-1}$ perché $U U^{-1} = \mathbb{1}$

$\Rightarrow \partial_\mu (U U^{-1}) = 0 \;]$

$\mathcal{L}(\varphi, D_\mu\varphi)$ è invariante sotto trasf. locali:

$$\begin{cases} \varphi' = U\varphi \\ A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + i(\partial_\mu U)U^{-1} \end{cases}$$

perché $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{L}(UX, UY)$

* ogg. in rep. Adj gliovoni combinaz. lin. di generatori dell'Alg. (in gliovoni rep t^a_R stessi)

Trasf. INFINITESIME $\longleftrightarrow$ $\alpha^a(x) \ll 1$

$$U(x) = e^{-i\alpha^a(x) t^a_R} \simeq \mathbb{1} - i\alpha^a(x) t^a_R \equiv \mathbb{1} - i\underbrace{\alpha(x)}_{}$$

oggetto nella RAPP. AGGIUNTA (abuso di linguaggio*)

$$\delta\varphi = -i\alpha(x)\varphi \qquad (\delta\varphi \equiv \varphi' - \varphi)$$

$$\delta A_\mu = A'_\mu - A_\mu = (\mathbb{1} - i\alpha)A_\mu(1 + i\alpha) + i\left[\partial_\mu(\cancel{\mathbb{1}} - i\alpha)\right](1+i\alpha) - A_\mu$$

$$= \cancel{A_\mu} - i\alpha A_\mu + iA_\mu\alpha + \partial_\mu\alpha - \cancel{A_\mu}$$

$$= \partial_\mu\alpha + i[A_\mu, \alpha] \leftarrow D_\mu\alpha$$

(*) vedi sotto

$$= \partial_\mu\alpha^a t^a_R - i\alpha^a[t^a_R, A_\mu]$$

Se prendiamo α^a cost. $\rightsquigarrow$ $\delta A_\mu = -i[\alpha^a t^a_R, A_\mu]$

$\Rightarrow$ A_μ trasf nella rep Adj

$$\to \quad A_\mu = A^a_\mu t^a_R \qquad (*)$$

La connessione che agisce su un vett. nella rapp. R è data da (*)

(Se abbiamo $\varphi \in R$ e $\chi \in \tilde{R}$

$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + iA^a_\mu t^a_R\varphi$ $\qquad$ $D_\mu\chi = \partial_\mu\chi + iA^a_\mu t^a_{\tilde{R}}\chi$)

$$\delta \mathbb{A}_\mu = \partial_\mu \alpha^a t^a_R - i\alpha^a A^b_\mu [t^a_R, t^b_R] =$$

$$= \partial_\mu \alpha^c t^c_R - i\alpha^a A^b_\mu i f^{abc} t^c_R$$

$$= (\partial_\mu \alpha^c + f^{cab} \alpha^a A^b_\mu) t^c_R = \delta A^c_\mu t^c_R$$

$$\Downarrow$$

$$\delta A^a_\mu = \partial_\mu \alpha^a - f^{abc} A^b_\mu \alpha^c$$

$$(*) \quad D_\mu \alpha = \partial_\mu \alpha + i A^a_\mu t^a_{Ad} \alpha = \partial_\mu \alpha + i A^a_\mu [t^a, \alpha] =$$

$$= \partial_\mu \alpha + i [\mathbb{A}_\mu, \alpha]$$

TERMINE CINETICO per i bosoni di gauge $A^a_\mu(x)$ ← Finora introdotto campo nuovo, ma scritto solo termini interaz.

↑ INV. sotto Lorentz, gauge e quadratico nelle derivate.

[In QED avevamo $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ $\quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$)

Partiamo calcolandoci $[D_\mu, D_\nu]$

$$[(\partial_\mu + i\mathbb{A}_\mu), (\partial_\nu + i\mathbb{A}_\nu)]\varphi =$$

$$= \underbrace{\cancel{[\partial_\mu, \partial_\nu]}}_{=0}\varphi + i[\partial_\mu, \mathbb{A}_\nu]\varphi - i[\partial_\nu, \mathbb{A}_\mu]\varphi$$

$$- \underbrace{[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu]}_{\neq 0 \text{ in teorie di gauge non-ab}}\varphi$$

$$= i\,\partial_\mu(\mathbb{A}_\nu\varphi) - i\,\mathbb{A}_\nu \partial_\mu \varphi \qquad - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

$$- [\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu]\varphi$$

$$= i(\partial_\mu \mathbb{A}_\nu)\varphi + i\cancel{\mathbb{A}_\nu \partial_\mu \varphi} - i\cancel{\mathbb{A}_\nu \partial_\mu \varphi} - (\mu \leftrightarrow \nu)$$
$$-[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu]\varphi$$

$$= i\Big[\partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu + i[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu] \Big]\varphi$$

$$\equiv i\, \mathbb{F}_{\mu\nu}\varphi \qquad\qquad \mathbb{F}_{\mu\nu} \equiv -i[D_\mu, D_\nu]$$

Vediamo come trasforma $\mathbb{F}_{\mu\nu}$

$$\mathbb{F}_{\mu\nu}\varphi = [D_\mu, D_\nu]\varphi \longmapsto U[D_\mu, D_\nu]\varphi = U\mathbb{F}_{\mu\nu}\varphi =$$
$$= U\mathbb{F}_{\mu\nu}U^{-1}(U\varphi)$$
$$\mapsto \mathbb{F}'_{\mu\nu}\varphi' = \mathbb{F}'_{\mu\nu}(U\varphi)$$

$$\mathbb{F}'_{\mu\nu} = U\mathbb{F}_{\mu\nu}U^{-1}$$

trasforma in maniera covariante (come un ogg. nella rap. Adj) con $U(x)$.

possiamo espanderlo

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\, t^a_R \qquad \leftarrow \text{CURVATURA (della connessione } \mathbb{A}_\mu\text{)}$$

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu + i[\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu] = \partial_\mu A^a_\nu t^a_R - \partial_\nu A^a_\mu t^a_R +$$
$$+ i A^b_\mu A^c_\nu [t^b_R, t^c_R] =$$

$$= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu)\, t^a_R$$

$$\Rightarrow \quad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

Il termine cinetico deve essere Lorentz inv. e gauge inv.

$$= -k \, tr\left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right)$$

$tr(FF) \mapsto tr(UF\cancel{U^{-1}}\cancel{U}FU^{-1}) =$

$= tr(FF)$

ciclicità della traccia

$$= -k \, F^a_{\mu\nu} F^{b\,\mu\nu} \, tr\left(t^a_R t^b_R\right) =$$

$$= -k \, F^a_{\mu\nu} F^{b\,\mu\nu} \, C(R) \, \delta^{ab} = -k \, C(R) \, F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu} \quad \Leftarrow \quad k = \frac{1}{4C(R)}$$

termine cinetico normalizzato canonicamente.

$\downarrow$

$G = SU(N)$ e $R = N$ $\quad C(N) = 1/2$

$\rightarrow k = \frac{1}{2}$

[Se G non è compatto, allora $tr(t^a_R t^b_R) \not\propto \delta^{ab}$, ma sulla diagonale ci saranno $+1$ e -1

$\Rightarrow$ avremmo dei termini cinetici negativi.]

$-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu}$ contiene termini CUBICI e QUARTICI in A^a_μ

$\rightarrow$ termini di interazione tra i bosoni vettori

La Lagrangiana $\mathcal{L}(\varphi, A)$ inv. sotto trasf. gauge

$$\mathcal{L}(\varphi, A) = \mathcal{L}_{\text{before}}(\varphi, D_\mu \varphi) - \frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu}$$

Per i calcoli perturbativi, spesso è più utile riscalare

$$A_\mu^a \mapsto g\, A_\mu^a \qquad \text{(ridef. di campo)}$$

$$F_{\mu\nu}^a \mapsto g\,\partial_\mu A_\nu^a - g\,\partial_\nu A_\mu^a - g^2 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c = g\, F_{\mu\nu}^a$$

g^2 sparisce dal termine cin.

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D_\mu\psi \mapsto (\partial_\mu + i g A_\mu)\psi$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{before}(\psi, D_\mu\psi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

g è la COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO

REGOLE DI FEYNMAN

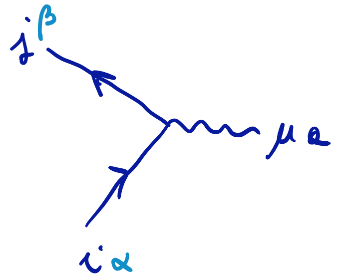
Scegliamo ψ spinore (massless) e lo chiamiamo ψ

$$\mathcal{L}_{before}(\psi, D_\mu\psi) = i\bar\psi\gamma^\mu D_\mu\psi =$$

propagatore $\frac{i}{\not p}$

$$= i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi \underbrace{- g\bar\psi\gamma^\mu A_\mu\psi}$$

$$-g\,\bar\psi\gamma^\mu A_\mu^a t_R^a\psi = -g\,\bar\psi_{i\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}(t_R^a)_{ij}\psi_{j\beta}A_\mu^a$$



$$-ig\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}(t_R^a)_{ij}$$

$$\mathcal{L}_{kin}(A) = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu\right) \cdot \left(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} - g f^{ade} A^{d\mu} A^{e\nu}\right)$$

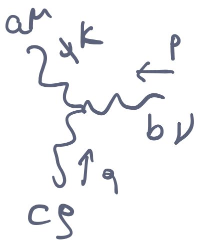
$$= -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)^2 + \frac{1}{2} g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \underbrace{\left(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}\right)}_{2\partial^\mu A^{a\nu}} - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu} A^{e\nu}$$

propagatore

(?)

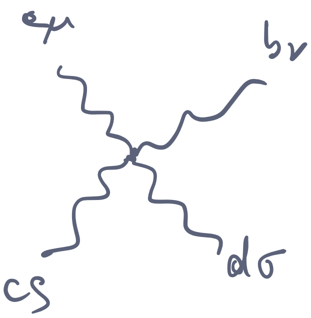
vertici

$$-i g f^{mnr} \tilde{A}^n_\alpha(p) \tilde{A}^r_\beta(q) k^\alpha \tilde{A}^m_\gamma(k) \eta^{\beta\gamma}$$



$$\frac{\delta}{\delta \tilde{A}^a_\mu} \frac{\delta}{\delta \tilde{A}^b_\nu} \frac{\delta}{\delta \tilde{A}^c_\rho}$$

$$g f^{abc}\left[\eta^{\mu\nu}(p-k)^\rho + \eta^{\nu\rho}(q-p)^\mu + \eta^{\mu\rho}(k-q)^\nu\right]$$



$$-ig^2\Big[f^{abe} f^{cde}\left(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right) + f^{ace} f^{bde}\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right) + f^{ade} f^{bce}\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}\right)\Big]$$

[PESKIN]