

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \quad a_n \neq 0 \quad \text{grado} = n$$

allora $\exists$ k con $1 \leq k \leq n$, k rappresenta il numero delle radici distinte di $P(z)$,
 c'è un insieme $\{z_1, \dots, z_k\}$ formato esattamente dalle radici, ogni radice z_j ha una molteplicità $m_j \in \mathbb{N}$ e si ha

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_k)^{m_k}$$

$$m_1 + \dots + m_k = n$$

Esercizio Se $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ e se $a_n \neq 0$

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ allora se z_0 è una radice anche $\bar{z}_0$ è una radice.

z_0 è una radice $P(z_0) = 0$

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

$$\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{0} = 0$$

$$\overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0$$

$$\overline{a_n} \bar{z}_0^n + \overline{a_{n-1}} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \bar{z}_0 + \overline{a_0} = 0$$

$$a_n \bar{z}_0^n + a_{n-1} \bar{z}_0^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0$$

$$P(\bar{z}_0)$$

$$P(z_0) = 0 \iff P(\bar{z}_0) = 0$$

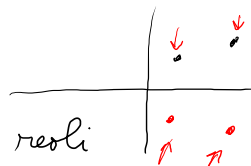
z_0 è una radice di $P(z) \iff \bar{z}_0$ è una radice di $P(z)$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \neq 0$$

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$



$P(z)$ di grado 3 a coefficienti reali

con due radici distinte entrambe con parte immaginaria non nulla

Coordinate polari nel piano

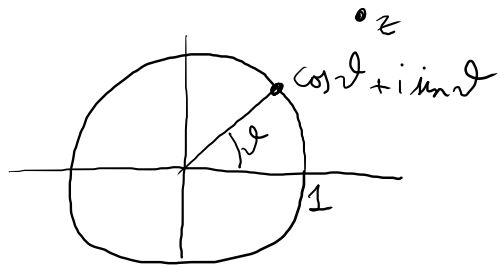
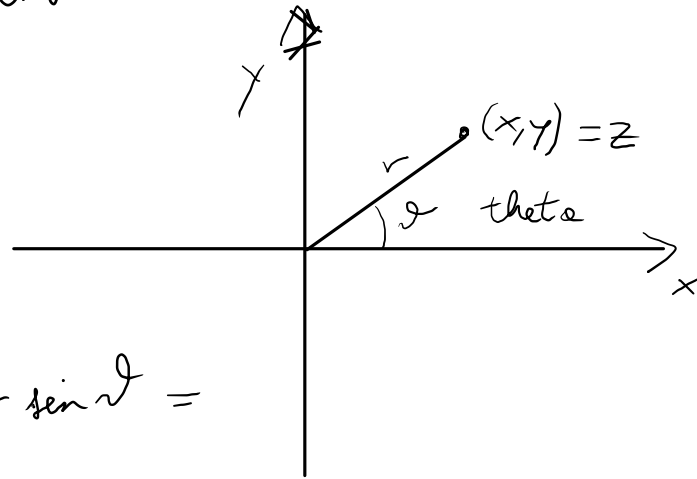
$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = x + iy = r \cos \vartheta + i r \sin \vartheta =$$

$$z = r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

$$r = |z|$$



$$|\cos \vartheta + i \sin \vartheta| = \sqrt{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta} = 1$$

Teor (Formule di De Moivre) Dato $z \in \mathbb{C}$ con coordinate polari (r, ϑ) , per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$z^n = r^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))$$

$$\left(z = r (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)) \right)$$

$$z = x + iy$$

$$z^n = (x + iy)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k}$$

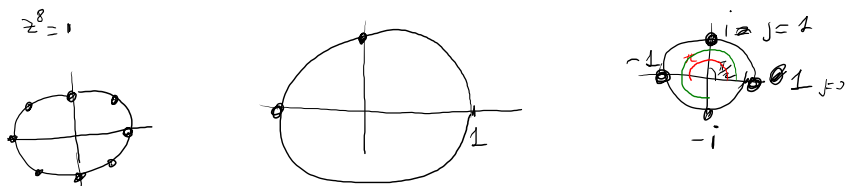
Teor (radici ^{n-esime} dell'unità) L'equazione $z^n = 1$

ha n soluzioni distinte

$$z_j = \cos\left(\frac{2\pi}{n}j\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}j\right) \quad j=0, \dots, n-1$$

E_s $z^4 = 1$

$$z_j = \cos\left(\frac{2\pi}{4}j\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{4}j\right) \quad j=0, 1, 2, 3$$



Dim $z^n = 1$ La generica soluzione ha

una rappresentazione $z = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$

$$z^n = r^n(\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))$$

$$* \quad r^n(\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) = 1$$

$$|r^n(\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))| = |r^n| \cdot \underbrace{|\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)|}_1$$

$$= r^n = 1 \iff r = 1$$

$$** \quad \cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta) = 1 = 1 + 0i \quad \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$*** \quad \begin{cases} \cos(n\vartheta) = 1 \\ \sin(n\vartheta) = 0 \end{cases} \iff n\vartheta = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\vartheta = \frac{2\pi k}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

Faccendo variare $k=0, \dots, n-1$ si ottengono

n numeri complessi distinti

Altri valori di k mi danno uno di questi n soluzioni già ottenute.

Infatti se considero $k \geq n$ noto

$$k : n = q \quad \text{con un resto } 0 \leq r \leq n-1$$

$$k = n \cdot q + r \quad \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi(nq+r)}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi(nq+r)}{n}\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}(nq+r)\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}(nq+r)\right)$$

$$= \cos\left(2\cancel{q}\pi + \frac{2\pi r}{n}\right) + i \sin\left(2\cancel{\pi}q + \frac{2\pi r}{n}\right) \quad 0 \leq r \leq n-1$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi r}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi r}{n}\right) \quad 0 \leq r \leq n-1$$