Numeri

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ insieme dei numeri naturali (interi ≥ 0)

$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ insieme dei numeri interi

$\mathbb{Q} := \{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0 \}$ numeri razionali

Su $\mathbb{N}$ sono definite $+$ e $\cdot$

Su $\mathbb{Z}$: $+, -, \cdot$

Su $\mathbb{Q}$: $+, -, \cdot, /$ ($/$ con divisore $\neq 0$)

Numeri reali : allineamento decimale finito o infinito con

$$0,999\ldots = 0,\overline{9} = 1$$

Infatti

$$1 - 0,9 = 0,1$$

$$1 - 0,99 = 0,01$$

$$1 - 0,999 = 0,001$$

$$\dots$$

$$1 - 0,\overline{9} = 0,\overline{0} = 0 .$$

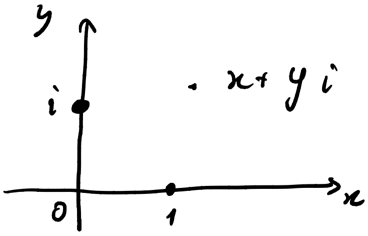
$\mathbb{R} :=$ insieme dei numeri reali $+, -, \cdot, /$

Numeri complessi

Coppie ordinate (x, y) di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$

Poniamo $i := (0,1)$, $0 = (0,0)$

$1 := (1,0)$



$(x, y) = x + y i$

Somma: $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$

Moltiplicazione: imponiamo $i^2 = -1$ e la validità delle proprietà commutativa e distributiva

$\boxed{i = \sqrt{-1}}$

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

$\mathbb{C} := \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ insieme dei numeri complessi

Il numero complesso $x + 0i$ si identifica col numero reale x ~~ms~~ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Poniamo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\bar{z} := x - yi$ coniugato di z

<u>**OSS**</u> $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$

$\bar{i} = -i$

$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 \geq 0$ è reale

Si pone $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$ modulo di z

$z = 0 \iff |z| = 0$

$z\bar{z} = |z|^2$

$z \neq 0 \iff z\bar{z} > 0$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$ <u>inverso di z</u>

$w = u + vi \in \mathbb{C}$, $u, v \in \mathbb{R}$ Si ha: $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

Mostriamo che $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ Infatti:

$$\overline{zw} = \overline{xu - yv + (xv + yu)i} = xu - yv - (xv + yu)i$$

$$\bar{z}\,\bar{w} = (x - yi)(u - vi) = xu - yv - (xv + yu)i = \overline{zw}.$$

Allora $|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = zw\,\bar{z}\,\bar{w} = z\bar{z}\,w\bar{w} = |z|^2|w|^2 \Rightarrow$

$|zw| = |z|\,|w|$

Ma <u>non</u> vale formula analoga per la somma

<u>**Es**</u> $|(3+2i) + (1-i)| = |4+i| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

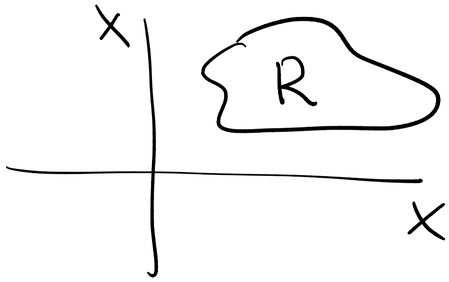
$|3+2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$; $|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i \quad ; \quad \frac{1+i}{1-i} = (1+i)\frac{1+i}{1+1} = i.$$

Relazioni X insieme. Una <u>relazione binaria</u> su X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$

Se $(x,y) \in R$ diremo che <u>x è in relazione con y</u> e scriveremo anche $x R y$. In caso contrario $x \not R y$.

<u>Idea</u> $R \subset X$ ci dice esattamente quali elementi x e $y \in X$ sono tra loro in questa relazione



Es. $R = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \leq n\}$ relazione di minore o uguale

$1 R 2$, $3 R 3$, $4 \not R 2$

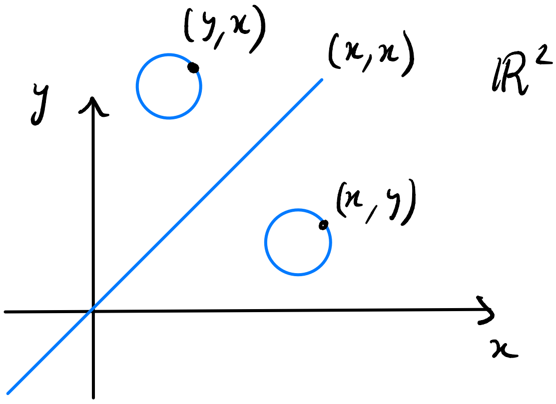
Una relazione binaria R su X $(R \subset X \times X)$

- <u>riflessiva</u> se $\forall x \in X$ si ha $x R x$
- <u>simmetrica</u> se $\forall x,y \in X$, $x R y \Rightarrow y R x$
- <u>transitiva</u> se $\forall x,y,z \in X$, $x R y$ e $y R z \Rightarrow x R z$

Una relazione binaria R su X è detta <u>relazione d'equivalenza</u> se R è riflessiva, simmetrica e transitiva. Spesso anziché R si indica con $\sim$

$x \sim y$ anziché $x R y$ (è solo notazione)

Esempio: relazioni su $\mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali)



- R è riflessiva se contiene la diagonale del 1° e 3° quadrante
- simmetrica se è simmetrica rispetto alla diagonale

Sia ora $\sim$ una relazione d'equivalenza su X

$\forall x \in X$ definiamo $[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$

classe d'equivalenza di x

1) $x \in [x]$ per la proprietà riflessiva $\Rightarrow [x] \neq \emptyset$

2) $y \in [x] \Leftrightarrow [y] = [x]$.

Infatti se $y \in [x] \Rightarrow x \sim y$. Sia ora $z \in [y] \Rightarrow$ $y \sim z$ e quindi $x \sim z$ (proprietà transitiva) $\Rightarrow z \in [x] \quad \forall z \in [y]$

da cui $[y] \subset [x]$. Sia ora $z \in [x] \Rightarrow x \sim z$ $\Rightarrow \underset{\text{sim}}{y \sim x}$ e $x \sim z \Rightarrow \underset{\text{tran}}{y \sim z} \Rightarrow z \in [y] \quad \forall z \in [x]$

$\Rightarrow [x] \subset [y]$. Ne segue $[x] = [y]$. Viceversa: $[x] = [y] \Rightarrow y \in [y] = [x]$.

3) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \iff [x] = [y]$

Infatti $\Leftarrow$ è evidente. Dimostriamo $\Rightarrow$

$$[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, z \in [x] \cap [y] \underset{(2)}{\Rightarrow} [x] = [z] = [y].$$

Quindi classi di equivalenza distinte sono sottoinsiemi disgiunti e non vuoti di X.

<u>Es.</u> Nell'insieme $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ dei numeri interi (positivi, negativi e nullo) definiamo la relazione

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Z} \qquad a \equiv b \iff a - b \text{ pari}$$

Mostriamo che $\equiv$ è una relazione d'equivalenza

$a \equiv a$ perché $a - a = 0$ pari

$a \equiv b \Rightarrow a - b$ pari $\Rightarrow b - a = -(a-b)$ pari $\Rightarrow b \equiv a$

$a \equiv b$ e $b \equiv c \Rightarrow \exists\, k, h \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$a - b = 2k \quad \text{e} \quad b - c = 2h \Rightarrow$$

$a - c = (a-b) + (b-c) = 2k + 2h = 2(k+h)$ pari

$\Rightarrow a \equiv c$ (transitiva)

$[0] = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ pari}\}$,

$[1] = \{a \in \mathbb{Z} \mid a - 1 \text{ pari}\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ dispari}\}$