

Lezione 3

Esempi 1) X insieme qualunque,

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è una distanza che induce la topologia discreta
(d è detta distanza discreta su X). E

2) $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$

è la distanza Euclidea e induce la topologia Euclidea vista prima.

3) Più in generale su \mathbb{R}^n consideriamo la distanza Euclidea $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Che d sia una distanza su \mathbb{R}^n è stato dimostrato in Geometria 1. La disuguaglianza triangolare segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

La topologia su \mathbb{R}^n indotta da d è detta
Topologia Euclidea

4) Distanza Euclidea su \mathbb{C}^n

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$$

\leadsto topologia Euclidea su \mathbb{C}^n .

OSS (X, d) spazio metrico. $U \subset X$ aperto \Leftrightarrow
 $\forall x \in U \exists r > 0$ t.c. $B(x; r) \subset U$.

Def Sia V uno spazio vettoriale reale o complesso

Una funzione $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ è detta norma se:

- 1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_V$ (non degenera)
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (omogenea)
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare)

Uno spazio normato è uno spazio vettoriale (su \mathbb{R} o \mathbb{C})
munito di una norma.

OSS • $\|0_V\| = \|0 \cdot 0_V\| = 0 \|0_V\| = 0$ (inversa di 1)

$$\bullet 0 = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V.$$

Esempio \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n sono spazi normati con la
norma Euclidea

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

denotate anche $\|\cdot\|_2$.

Una norma $\|\cdot\|$ su V induce una distanza su V

$$d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x - y\|$$

OSS La distanza Euclidea su \mathbb{R}^n e su \mathbb{C}^n è indotta dalla norma Euclidea.

Esempio Su \mathbb{R}^n e su \mathbb{C}^n definiamo per $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n |x_j|$$

$$\text{e } \|x\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

Si vede facilmente che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono norme su \mathbb{R}^n e $\mathbb{C}^n \rightsquigarrow d_1$ e d_∞ distanze indotte.

$$d_1(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$$

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$$

Def Due distanze $d_1, d_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ sono equivalenti se $\exists c_1, c_2 > 0$ costanti t.c.

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Equivalentemente $c_1 d_1 \leq d_2 \leq c_2 d_1$ (come funzioni)

Se V sp. vett. / \mathbb{R} o / \mathbb{C} due norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ sono equivalenti se $\exists c_1, c_2 > 0$ t.c.

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in V.$$

OSS L'equivalenza è una relazione d'equivalenza tra distanze (o norme).

Prop. Distanze equivalenti inducono la stessa topologia.

Norme equivalenti inducono distanze equivalenti e dunque le stesse topologie.

Dica 1^a parte Supponiamo $d_1, d_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dist. eqv.

$$c_1 d_1 \leq d_2 \leq c_2 d_1, \quad c_1, c_2 > 0 \text{ cost.}$$

Idea Verificare che

E

$$\left. \begin{array}{l} B_{d_1}(x; \frac{r}{c_2}) \subset B_{d_2}(x; r) \\ B_{d_2}(x; c_1 r) \subset B_{d_1}(x; r) \end{array} \right\} \quad \forall x \in X, \forall r > 0$$

Dedurre che $B_{d_1}(x; r) \in \mathcal{T}_{d_2}$ e $B_{d_2}(x; r) \in \mathcal{T}_{d_1}$ e concludere che $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$.

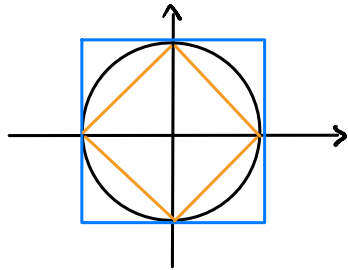
2^a parte è ovvio.

OSS Non vale il viceversa, es: \mathbb{Z} con dist. Euclidea e dist. discreta

Esempio $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono norme equivalenti su \mathbb{R}^n e $\mathbb{C}^n \Rightarrow$ inducono la stessa topologia.

$$\text{Infatti: } \left. \begin{array}{l} \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \end{array} \right\} \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ (} x \in \mathbb{C}^n \text{)}$$

\mathbb{R}^2 sfere di raggio 1



$$\begin{array}{ll} \|x\|_1 = 1 & |x| + |y| = 1 \\ \|x\|_2 = 1 & x^2 + y^2 = 1 \\ \|x\|_\infty = 1 & \max(|x|, |y|) = 1 \end{array}$$

Si può dimostrare che tutte le norme sono equivalenti in dim finite.

Def Uno spazio topologico X è detto metrizzabile se $\exists d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ distanza che induce la topologia di X .

Esempio $\cdot \mathbb{R}^n$ con la topologia Euclidea è metrizzabile

- $\cdot X$ discreto $\Rightarrow X$ metrizzabile.
- $\cdot X$ banale e $\# X \geq 2 \Rightarrow X$ non metrizzabile E

Sottospazi topologici

Teorema Sive X spazio topologico e $A \subset X$ sottoinsieme.

La famiglia $\mathcal{T}_A := \{U \cap A \mid U \subset X \text{ aperto}\}$

è una topologia su A , detta topologia indotta da X o topologia relativa.

Quando $V \subset A$ è aperto in $A \Leftrightarrow \exists U \subset X$ aperto in X t.c. $V = U \cap A$. V è detto aperto relativo.

Dima 1) $\emptyset = \emptyset \cap A$ e $A = X \cap A \in \mathcal{T}_A$

2) $V_i \in \mathcal{T}_A, i \in I \Rightarrow \exists U_i \subset X$ aperti $\forall i \in I$ t.c.

$$\begin{aligned} V_i = U_i \cap A \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i &= \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap A \in \mathcal{T}_A \end{aligned}$$

3) $V, V' \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \exists U, U' \subset X$ aperti t.c.

$$V = U \cap A, V' = U' \cap A \Rightarrow$$

$$V \cap V' = (U \cap A) \cap (U' \cap A) = (U \cap U') \cap A \in \mathcal{T}_A.$$

Def $A \subset X$ con la topologia \mathcal{T}_A indotta da X è detto spazio (topologico) di X .

Esempi 1) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

è detta n -sfera (o sfera n -dimensionale)

S^n ha equazione

$$x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ si chiama anche circonferenza

$S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ è discreto.

2) $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

n -boccia (o bocce n -dimensionale)

$$B^0 = \{0\}$$

$$B^1 = [-1, 1] \subset \mathbb{R} \quad \text{si ha: } S^1 \subset B^{n+1}$$

Spesso B^n è denotato con D^n (n -disco)

3) $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ intervallo con la topologia indotta.