Lezione 4

Prop Sia X sp. top e $A \subset X$ sottospazio.
X metrizzabile $\Rightarrow$ A metrizzabile.

Dim **Idea** $d: X \times X \to \mathbb{R}$ distanza su X che induce la topologia di X $\rightsquigarrow$

$$d_A = d|_{A \times A} : A \times A \to \mathbb{R} \quad \text{restrizione di } d$$

d distanza $\Rightarrow$ d_A distanza su A

$$B_{d_A}(x; r) = B_d(x; r) \cap A \qquad \forall x \in A, \ \forall r > 0$$

$\Rightarrow$ d_A induce su A la topologia di sottospazio $\boxed{E}$

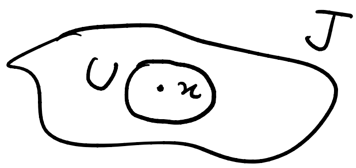
Corollario I sottospazi topologici di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{C}^n$ sono metrizzabili.

Quindi B^n e S^n sono metrizzabili.

Intorni

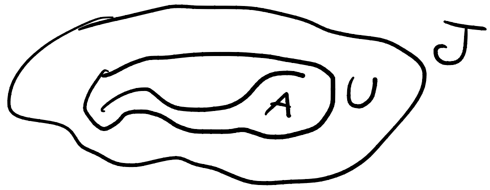
Def X spazio top. $x \in X$. Un sottoinsieme $J \subset X$ è detto intorno di x in X se $\exists\, U \subset X$ aperto t.c.

$$x \in U \subset J$$



Sia ora $A \subset X$ sottoinsieme.
$J \subset X$ è detto intorno di A in X se $\exists\, U \subset X$ aperto t.c.

$$A \subset U \subset J$$



OSS Se $\mathcal{B}$ base per X, $J \subset X$ è intorno di $x \Leftrightarrow$ $\exists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset J$.

Esempi 1) $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ è intorno di $0 \in \mathbb{R}$ infatti

$$0 \in \underset{\text{aperto}}{]-1,1[} \subset [-1,1]$$

ma $[-1,1]$ non è intorno di 1 (né di -1)

Infatti $\forall\, a < 1 < b$, $]a,b[\not\subset [-1,1]$.

2) $[-1,1]$ è intorno di 1 (ed ogni suo punto) in $[-1,1]$

E' sempre importante tener presente l'ambiente.

OSS $U \subset X$ aperto $\Rightarrow$ U intorno di ogni $x \in U$ e di ogni $A \subset U$ (<u>intorno aperto</u>).

Def Una famiglia $\mathcal{J}_x$ di intorni di $x \in X$ è detta <u>base di intorni di x</u> (o <u>sistema fondamentale di intorni</u>) se $\forall\, L \subset X$ intorno di x $\exists\, J \in \mathcal{J}_x$ t.c.

$$J \subset L.$$

In modo analogo si definiscono le basi di intorni di sottoinsiemi $A \subset X$.

OSS $\mathcal{B}$ base per la topologia di X, $x \in X \Rightarrow$ $\mathcal{B}_x := \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \}$ base di intorni di x.

$\boxed{E}$

Esempi 1) $0 \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{J}_0 := \{ [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{N} \}$

base numerabile di intorni di 0.

Infatti $\forall\, L \subset \mathbb{R}$ intorno di 0 $\exists\, U \subset \mathbb{R}$ aperto

t.c. $0 \in U \subset L \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ t.c.

$]-\varepsilon, \varepsilon[\subset U \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \subset]-\varepsilon, \varepsilon[\subset U \subset L$.

In modo analogo $\mathcal{J}_x = \{ [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{N} \}$

base numerabile di intorni di $x \in \mathbb{R}$.

2) Più in generale (X, d) spazio metrico $x \in X \rightsquigarrow$

$\mathcal{J}_x := \{ B(x; \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \}$ base numerabile di intorni di x.

OSS 1) $J, A \subset X$ e J intorno di $x \in X \Rightarrow J \cup A$ intorno di x

2) $J_1, \dots, J_n$ intorni di $x \in X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} J_i$ intorno di x

Operatori topologici

Chiusura

Def Sia X uno spazio topologico e $A \subset X$. Si chiama chiusura di A in X il sottoinsieme

$$Cl_X A = \bar{A} := \bigcap_{\substack{A \subset C \subset X \\ C \text{ chiuso}}} C$$

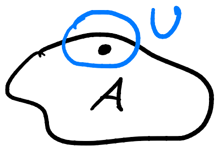
intersezione di tutti i chiusi che contengono A.

OSS $Cl_X A$ è il più piccolo sottoinsieme chiuso che contiene A.

A chiuso $\iff A = Cl_X A$.

Teorema Sia $x \in X$. Allora $x \in Cl_X A \iff$ $\forall\, U \subset X$ intorno aperto di x si ha che

$$U \cap A \neq \emptyset$$



Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $x \in Cl_X A$ e supponiamo per assurdo che per un certo $U \subset X$ aperto t.c. $x \in U$ si abbia $U \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset X - U$ chiuso $\Rightarrow$ $Cl_X A \subset X - U \Rightarrow x \in X - U$ contraddizione

$\boxed{\Leftarrow}$ Per assurdo supponiamo $x \in X - Cl_X A =: U$ aperto $\Rightarrow U \cap A \subset U \cap Cl_X A = \emptyset$ contraddizione.

OSS Se $\mathcal{J}_x$ è base di intorni di x, nel teorema possiamo sostituire U con $J \in \mathcal{J}_x$ cioè

$$x \in Cl_X A \iff J \cap A \neq \emptyset \ \forall J \in \mathcal{J}_x .$$ E

Def I punti di $Cl_X A$ sono detti punti di aderenza di A in X.

Il teorema precedente (e l'osservazione) caratterizza i punti di aderenza.

Frontiera

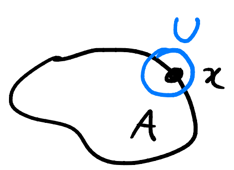
Def La frontiera (o bordo) di A in X è

$$Fr_X A = \partial_X A := Cl_X A \cap Cl_X (X - A)$$

OSS $Fr_X A$ è chiuso

I punti di $Fr_X A$ sono detti punti di frontiera di A.

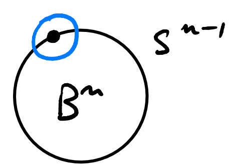
Corollario $x \in Fr_X A \iff \forall U \subset X$ intorno (aperto/basico) di x in X si ha $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap (X - A) \neq \emptyset$.



Es $Fr_{\mathbb{R}} [0,1] = \{0, 1\}$

$Fr_{[0,1]} [0,1] = \emptyset$

$Fr_{\mathbb{R}^n} B^n = S^{n-1}$



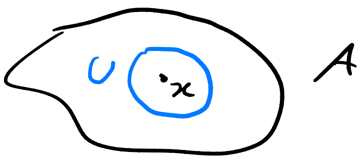
Interno

Def Si definisce interno di A in X il sottoinsieme

$$\mathrm{Int}_X A = \mathring{A} := \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ aperto} \\ \text{in } X}} U$$

OSS 1) $\mathrm{Int}_X A$ è il più grande aperto di X contenuto in A.

2) $x \in \mathrm{Int}_X A \iff \exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $U \subset A$



I punti di $\mathrm{Int}_X A$ sono detti *punti interni* di A.

OSS 1) A aperto in $X \iff A = \mathrm{Int}_X A$

2) A intorno di $x \in X \iff x \in \mathrm{Int}_X A$.

Es 1) $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}} [0,1] =]0,1[$

2) $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}^n} B^n = B(0;1) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$

Def Si chiama esterno di A in X il sottoinsieme

$$\mathrm{Ext}_X A := \mathrm{Int}_X (X - A)$$

OSS L'esterno di A è aperto

$x \in \mathrm{Ext}_X A \iff \exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $U \cap A = \emptyset$

I punti di $\mathrm{Ext}_X A$ sono detti *punti esterni* ad A.

Teorema $Fr_X A = Cl_X A - Int_X A$.

Dim "$\subset$" $x \in Fr_X A \Rightarrow x \in Cl_X A$

Se per assurdo $x \in Int_X A \Rightarrow Int_X A \cap (X - A) = \emptyset$

contraddizione.

"$\supset$" $x \in Cl_X A - Int_X A$ e supponiamo per assurdo

$x \notin Fr_X A \Rightarrow \exists\ U \subset X$ aperto t.c. $x \in U$ e

$U \cap A = \emptyset$ oppure $U \cap (X - A) = \emptyset$

Ma $U \cap A \neq \emptyset$ perché $x \in Cl_X A \Rightarrow$

$U \cap (X - A) = \emptyset \Rightarrow U \subset A \Rightarrow x \in Int_X A$

contraddizione.