

# Corso di Analisi 3

## Parte I: Equazioni Differenziali

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica, a.a. 2020/2021

### 1 Prime definizioni

Le equazioni differenziali sono uno degli strumenti principali utilizzati per modellizzare i fenomeni della Natura, nel senso più ampio del termine. Le troviamo in tutte le Scienze, principalmente nella Fisica, ma anche in ambito economico, biologico, medico, sociale. Esse sono catalogabili in due tipi diversi: le equazioni differenziali ordinarie e le equazioni differenziali alle derivate parziali. In queste note, tratteremo solo delle prime.

Consideriamo un'espressione del tipo

$$u' = f(t, u), \quad (1)$$

che chiameremo “equazione differenziale in forma canonica”, e iniziamo a spiegarne il significato. Qui  $f$  è una funzione continua definita su un sottoinsieme aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ , a valori in  $\mathbb{R}^N$ .

**Definizione 1** Diremo che una funzione  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  è “soluzione di (1) in  $I$ ” se:

- $I$  è un intervallo non degenere di  $\mathbb{R}$ ,
- $(t, u(t)) \in \Omega$  per ogni  $t \in I$ ,
- $u$  è derivabile su  $I$ ,
- $u'(t) = f(t, u(t))$  per ogni  $t \in I$ .

Ricordiamo che

$$u'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \in \mathbb{R}^N$$

è il “vettore derivata” di  $u$  in  $t$ .<sup>1</sup> Spesso, pensando ai modelli della meccanica,  $u(t)$  si può interpretare come “vettore posizione al tempo  $t$ ” e  $u'(t)$  come “vettore velocità al tempo  $t$ ”. Si chiama “orbita” della soluzione  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  l'insieme immagine  $u(I) = \{u(t) : t \in I\}$ , mentre chiameremo “traiettoria” di  $u$  il suo grafico  $\{(t, u(t)) : t \in I\}$ . Lo spazio  $\mathbb{R}^N$  si chiama “spazio delle fasi”.

---

<sup>1</sup>Siano  $a = \inf I$  e  $b = \sup I$ . Se  $a \in I$ , allora  $u'(a)$  sarà un limite destro. Similmente, se  $b \in I$ , allora  $u'(b)$  sarà un limite sinistro.

Nelle applicazioni ci si trova spesso ad affrontare la ricerca di una soluzione dell'equazione differenziale che soddisfi una “condizione iniziale” del tipo

$$u(t_0) = u_0 .$$

Avendo in mente i modelli della meccanica, si dice che la “posizione” di  $u$  “al tempo iniziale”  $t_0$  è  $u_0$ . Ci si trova così a dover risolvere il “problema di Cauchy”

$$(PC) \quad \begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una funzione continua, e  $(t_0, u_0) \in \Omega$ .

**Definizione 2** Diremo che una funzione  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  è “soluzione del problema (PC)” se:

- $I$  è un intervallo contenente al suo interno  $t_0$ ,
- $u$  è soluzione di (1) in  $I$ ,
- $u(t_0) = u_0$ .

Risulta molto utile la seguente formulazione equivalente del problema.

**Teorema 3** Una funzione  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  è soluzione del problema (PC) se e solo se:

- $I$  è un intervallo contenente al suo interno  $t_0$ ,
- $(t, u(t)) \in \Omega$  per ogni  $t \in I$ ,
- $u$  è continua su  $I$ ,
- $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$  per ogni  $t \in I$ .<sup>2</sup>

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare una doppia implicazione. Se  $u$  è una soluzione del problema (PC), allora

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds ,$$

il che dimostra una delle due implicazioni.

---

<sup>2</sup>L'integrale di una funzione a valori vettoriali  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , con

$$g(t) = (g_1(t), \dots, g_N(t)) ,$$

è definito da

$$\int_a^b g(t) dt = \left( \int_a^b g_1(t) dt, \dots, \int_a^b g_N(t) dt \right) .$$

Esso è quindi un vettore di  $\mathbb{R}^N$ . Se  $a < b$ , risulterà utile la seguente disuguaglianza:

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt .$$

Viceversa, se  $u$  è una funzione continua per cui si abbia

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

si ha che  $u(t_0) = u_0$ , e la funzione  $s \mapsto f(s, u(s))$  è continua. Quindi  $u$  è derivabile, e si ha

$$u'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds = f(t, u(t)),$$

per ogni  $t \in I$ . ■

Spesso le equazioni differenziali coinvolgono anche derivate di ordine più elevato. Un tipico esempio è dato dall'equazione di Newton  $F = ma$ . In questo caso, se  $x(t)$  denota la posizione di un oggetto di massa  $m$  al tempo  $t$ , l'equazione si può solitamente scrivere come

$$x'' = \frac{1}{m} F(t, x, x').$$

Qui  $F$  dipende dal tempo  $t$ , dalla posizione  $x$  e dalla velocità  $x'$ . Definendo  $y = x'$ ,  $u = (x, y)$ , e  $f(t, u) = (y, \frac{1}{m} F(t, x, y))$ , l'equazione si può scrivere come

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{m} F(t, x, y), \end{cases}$$

ossia  $u' = f(t, u)$ , che ne è la forma canonica (1). Il problema di Cauchy in questo caso avrà una condizione iniziale del tipo  $x(t_0) = x_0$ ,  $x'(t_0) = y_0$ .

In generale, un'equazione differenziale “di ordine  $n$ ” si presenta nella forma

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Essa può essere ricondotta alla forma canonica (1), con  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , ponendo

$$u_1 = x, u_2 = x', \dots, u_n = x^{(n-1)}, \quad f(t, u) = (u_2, u_3, \dots, g(t, u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Il corrispondente problema di Cauchy avrà come condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

## 2 Alcune semplici equazioni

Iniziamo a considerare il caso scalare  $N = 1$ : in generale, purtroppo, anche in questo caso “semplice”, trovare una soluzione esplicita di un'equazione differenziale può essere un'impresa senza speranza.

Consideriamo dapprima l'equazione differenziale

$$u' = a(t)u + b(t),$$

dove  $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono due funzioni continue. Si parla in questo caso di “equazione differenziale lineare”. Studiamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = a(t)u + b(t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Notiamo che, se  $u$  è una soluzione, allora

$$\frac{d}{dt} \left[ u(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} \right] = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} (u'(t) - a(t)u(t)) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} b(t);$$

integrando su  $[t_0, t]$ ,

$$u(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} - u_0 = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma,$$

da cui ricaviamo la formula risolutiva

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left( u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma \right).$$

Ad esempio, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3u + t^2 \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

ha come soluzione

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int_0^t 3 ds} \int_0^t e^{-\int_0^{\sigma} 3 ds} \sigma^2 d\sigma \\ &= e^{3t} \int_0^t e^{-3\sigma} \sigma^2 d\sigma \\ &= \frac{2}{27}(e^{3t} - 1) - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t. \end{aligned}$$

Analizziamo ora le “equazioni differenziali a variabili separabili”:

$$u' = e(t)g(u).$$

Qui  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  ha come dominio un intervallo  $J$ , ed  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo inoltre  $g(u) \neq 0$  per ogni  $u$  nell'intervallo  $J$ , per cui l'equazione si può scrivere l'equazione nella forma equivalente

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = e(t), \quad u(t) \in J. \quad (2)$$

Come sopra, studiamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = e(t)g(u) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

Supponendo che  $u([t_0, t])$  sia contenuto in  $J$  si può integrare (2) su  $[t_0, t]$  e, con un cambio di variabile, si ottiene

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^t e(s) ds.$$

Se denotiamo con  $\mathcal{P} : J \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva di  $1/g$ , otteniamo

$$\mathcal{P}(u(t)) = \mathcal{P}(u_0) + \int_{t_0}^t e(s) ds,$$

e siccome  $\mathcal{P}$  è strettamente monotona (avendo derivata sempre diversa da zero), possiamo scrivere

$$u(t) = \mathcal{P}^{-1}\left(\mathcal{P}(u_0) + \int_{t_0}^t e(s) ds\right).$$

Ad esempio, vediamo come trattare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sin t (u^2 + 1) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{u^2 + 1} = \int_0^t \sin s ds = 1 - \cos t,$$

da cui

$$\arctan u(t) = \arctan u_0 + 1 - \cos t,$$

ossia

$$u(t) = \tan\left(\arctan u_0 + 1 - \cos t\right).$$

Si noti che l'espressione è ben definita se  $t$  varia in un intorno di 0, ma potrebbe non esserlo per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Come secondo esempio, cerchiamo una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{1 + 2t}{\cos u} \\ u(0) = \pi. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\int_{\pi}^{u(t)} \cos u du = \int_0^t (1 + 2s) ds = t + t^2,$$

da cui

$$\sin u(t) = t + t^2.$$

Ora bisogna fare attenzione che ci troviamo con  $u(t)$  sull'intervallo contenente  $\pi$  dove la funzione  $\sin$  è strettamente monotona, cioè in  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ . Definendo  $w(t) = u(t) - \pi$ , avremo che  $w(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  e

$$\sin w(t) = \sin(u(t) - \pi) = -\sin u(t) = -(t + t^2),$$

per cui  $w(t) = \arcsin(-(t + t^2)) = -\arcsin(t + t^2)$ , e quindi

$$u(t) = \pi + w(t) = \pi - \arcsin(t + t^2).$$

## 3 Il problema di Cauchy: esistenza e unicità

### 3.1 Esistenza locale

Nel 1890, Giuseppe Peano ha dimostrato il seguente risultato di “esistenza locale”.

**Teorema 4 (di Peano)** *Per ogni  $(t_0, u_0) \in \Omega$ , esiste un  $r_0 > 0$  tale che il problema (PC) ha una soluzione  $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$ .*

Si noti che la soluzione potrebbe non essere unica. Ad esempio, sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(u) = \begin{cases} 2\sqrt{u} & \text{se } u \geq 0 \\ -2\sqrt{-u} & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

(Qui la funzione  $f$  non dipende esplicitamente da  $t$ . Si ha pertanto a che fare con un’“equazione differenziale autonoma”.) Si vede subito che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ha la soluzione costante  $u(t) = 0$ , ma anche la soluzione

$$u(t) = t|t| = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Inoltre, ce ne sono infinite altre, date da

$$u(t) = \begin{cases} (t - c)^2 & \text{se } t \geq c \\ 0 & \text{se } t < c, \end{cases}$$

dove  $c \geq 0$  è una costante arbitraria, oppure

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq c \\ -(t - c)^2 & \text{se } t < c, \end{cases}$$

dove  $c \leq 0$ , o anche

$$u(t) = \begin{cases} (t - c_2)^2 & \text{se } t \geq c_2 \\ 0 & \text{se } c_1 < t < c_2 \\ -(t - c_1)^2 & \text{se } t < c_1, \end{cases}$$

con  $c_1 \leq 0 \leq c_2$ .

Per avere anche l’unicità della soluzione, è necessario introdurre delle ipotesi aggiuntive sulla funzione  $f$ .

## 3.2 Esistenza e unicità locale

**Definizione 5** Diremo che la funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile se per ogni  $(t_0, u_0) \in \Omega$  esiste un intorno  $U$  e una costante  $\mathcal{L}_U > 0$  tale che

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq \mathcal{L}_U \|v - w\|,$$

per ogni  $(t, v)$  e  $(t, w)$  in  $U$ .

**Proposizione 6** La funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile se e solo se per ogni compatto  $K \subseteq \Omega$  esiste una costante  $L_K > 0$  tale che

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L_K \|v - w\|,$$

per ogni  $(t, v)$  e  $(t, w)$  in  $K$ .

Dimostrazione. Per quanto riguarda la prima implicazione, è sufficiente scegliere un intorno  $U$  compatto, e si ha la tesi. Vediamo quindi la seconda. Per assurdo, supponiamo che esista un compatto  $K \subseteq \Omega$  ed esistano due successioni  $(t_n, v_n)_n$  e  $(t_n, w_n)_n$  in  $K$  (con la stessa  $t_n$ ) tali che

$$\|f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n)\| > n \|v_n - w_n\|. \quad (3)$$

Sia  $M_K := \max\{\|f(t, u)\| : u \in K\}$ . Per la compattezza di  $K$  la successione  $(t_n, v_n)_n$  possiede una sottosuccessione  $(t_{n_k}, v_{n_k})_k$  convergente a un elemento  $(\bar{t}, \bar{u}) \in K$ . Essendo

$$\|v_{n_k} - w_{n_k}\| \leq \frac{1}{n_k} \|f(t_{n_k}, v_{n_k}) - f(t_{n_k}, w_{n_k})\| \leq \frac{1}{n_k} 2M_K \rightarrow 0,$$

abbiamo che anche  $\lim_k w_{n_k} = \bar{u}$ . Sia allora  $U$  un intorno di  $(\bar{t}, \bar{u})$  e  $\mathcal{L}_U > 0$  tale che

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq \mathcal{L}_U \|v - w\|,$$

per ogni  $(t, v)$  e  $(t, w)$  in  $U$ . Per  $k$  sufficientemente grande,  $(t_{n_k}, v_{n_k})$  e  $(t_{n_k}, w_{n_k})$  apparterranno a  $U$  e  $n_k \geq \mathcal{L}_U$ , per cui

$$\begin{aligned} \|f(t_{n_k}, v_{n_k}) - f(t_{n_k}, w_{n_k})\| &\leq \mathcal{L}_U \|v_{n_k} - w_{n_k}\| \\ &\leq n_k \|v_{n_k} - w_{n_k}\|, \end{aligned}$$

in contraddizione con (3). ■

**Proposizione 7** Se esiste la derivata parziale  $\frac{\partial f}{\partial u} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$  ed è continua, allora  $f$  è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile.

Dimostrazione. Consideriamo un punto  $(t_0, u_0) \in \Omega$  e fissiamo un  $\rho > 0$  tale che  $K := [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \times \bar{B}(u_0, \rho) \subseteq \Omega$ . Sia  $L_K := \max\{\|\frac{\partial f}{\partial u}(t, u)\| : u \in K\}$ . Allora, per ogni  $(t, v)$  e  $(t, w)$  in  $K$ ,

$$\begin{aligned} \|f(t, v) - f(t, w)\| &\leq \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(t, w + s(v - w)) \right\| : s \in [0, 1] \right\} \cdot \|v - w\| \\ &\leq L_K \|v - w\|. \end{aligned}$$

il che dimostra l'asserto. ■

**Teorema 8 (di Cauchy–Lipschitz)** Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora per ogni  $(t_0, u_0) \in \Omega$  esiste un  $r_0 > 0$  tale che il problema (PC) ha una ed una sola soluzione  $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Inoltre, la successione di funzioni  $(u_n)_n$ , definita da

$$u_0(t) = u_0, \quad u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds,$$

è tale che  $\lim_n u_n = u$ , uniformemente su  $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ .

Dimostrazione. Siano  $r_1 > 0$  e  $r_2 > 0$  tali che<sup>3</sup>

$$K := [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times \bar{B}(u_0, r_2) \subseteq \Omega,$$

sia  $L_K > 0$  la relativa costante di Lipschitz, e sia

$$M = \max\{\|f(t, u)\| : (t, u) \in K\}.$$

Scegliamo  $r_0 > 0$  tale che

$$r_0 < \min\left\{r_1, \frac{r_2}{M}, \frac{1}{L_K}\right\}.$$

Poniamo  $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$  e

$$X = \{u \in C(I_0, \mathbb{R}^N) : \|u - u_0\|_\infty \leq r_2\}.$$

Sia  $F$  la funzione che associa ad ogni  $v \in X$  la funzione  $F(v) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita da

$$[F(v)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds.$$

Dimostriamo che  $F(v) \in X$ . Infatti,  $F(v)$  è una funzione continua, e si ha

$$\|[F(v)](t) - u_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, v(s))\| ds \right| \leq M|t - t_0| < r_2.$$

Quindi, abbiamo definito una funzione  $F : X \rightarrow X$ . Notiamo inoltre che, prese  $v, w$  in  $X$ , si ha

$$\begin{aligned} \|F(v) - F(w)\|_0 &= \sup\{\|[F(v)](t) - [F(w)](t)\| : t \in I_0\} \\ &= \sup\left\{\left\| \int_{t_0}^t (f(s, v(s)) - f(s, w(s))) ds \right\| : t \in I_0\right\} \\ &\leq \sup\left\{\left| \int_{t_0}^t \|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\| ds \right| : t \in I_0\right\} \\ &\leq \sup\left\{\left| \int_{t_0}^t L_K \|v(s) - w(s)\| ds \right| : t \in I_0\right\} \\ &\leq L_K r_0 \|v - w\|_0. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Qui  $\bar{B}(u_0, \rho)$  denota la palla chiusa centrata in  $u_0$  di raggio  $\rho > 0$ .

Ponendo  $\alpha = L_K r_0$ , si ha quindi che  $\alpha < 1$  e

$$\|F(v) - F(w)\|_0 \leq \alpha \|v - w\|_0.$$

La funzione  $F : X \rightarrow X$  è pertanto una contrazione, e per il Teorema delle Contrazioni esiste un unico  $u \in X$  tale che  $F(u) = u$ . Allora

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds, \quad \text{per ogni } t \in I_0,$$

per cui  $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una soluzione del nostro problema. Il Teorema delle Contrazioni assicura inoltre che la successione  $(u_n)_n$  definita iterativamente in  $X$  da  $u_{n+1} = F(u_n)$  converge a  $u$ , nella topologia di  $X$ , cioè uniformemente. ■

### 3.3 L'unicità in grande

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = -1. \end{cases}$$

Poiché  $u(0) = -1$ , per continuità la soluzione  $u$  è negativa in un intorno di  $t_0 = 0$ ; finché  $u(t)$  non si annulla si può applicare il metodo di separazione delle variabili, che ci porta alla formula

$$u(t) = -(t - 1)^2.$$

Tale funzione si annulla per  $t = 1$ , dunque il metodo fornisce una soluzione definita nell'intervallo  $] - \infty, 1]$ . In tale intervallo la soluzione è unica. Nel punto  $(1, 0)$  il campo vettoriale cessa di essere localmente lipschitziano; da tale punto si biforcano infinite soluzioni per  $t > 1$ . In particolare, le funzioni

$$u_c(y) = \begin{cases} -(t - 1)^2 & \text{se } t \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < t < c \\ (t - c)^2 & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

al variare di  $c > 0$ , sono tutte soluzioni del problema di Cauchy in oggetto. Questo esempio dimostra che può esserci unicità locale ma non globale. La perdita dell'unicità nell'esempio precedente è dovuta al fatto che, pur essendoci unicità locale in un intorno di  $t_0$ , la traiettoria della soluzione passa per un punto in cui si perdono la locale lipschitzianità del campo vettoriale e l'unicità delle soluzioni ivi passanti.

**Teorema 9** *Sia  $f$  localmente lipschitziana e siano  $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$  soluzioni del problema (PC), con  $I_1, I_2$  intervalli aperti. Allora  $u_1 = u_2$  su  $I_1 \cap I_2$ .*

Dimostrazione. Sia  $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : u_1(s) = u_2(s) \text{ per ogni } s \in [t_0, t]\}$ . Per assurdo, sia  $t_1 = \sup J < \sup I_1 \cap I_2$ , per cui  $t_1 \in I_1 \cap I_2$ . Applicando il Teorema di Cauchy–Lipschitz al problema di Cauchy con condizione iniziale  $u(t_1) = u_1(t_1)$ , si trova una contraddizione. Si giunge poi ad un’analoga contraddizione anche se  $\inf J > \inf I_1 \cap I_2$ . ■

## 4 Prolungabilità ed esistenza globale

**Definizione 10** Sia  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  una soluzione di (1). Diremo che una funzione  $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$  è un “prolungamento” di  $u$  se  $I$  è un sottoinsieme proprio di  $I_*$  e  $u_*$  è anch’essa una soluzione di (1). Si dice che  $u$  è una “soluzione massimale” se non ammette prolungamenti. Il suo intervallo di definizione  $I$  viene allora detto “intervallo massimale di esistenza” di  $u$ .

**Proposizione 11** L’intervallo massimale di esistenza di una soluzione è un intervallo aperto.

Dimostrazione. Se per assurdo l’intervallo massimale  $I$  contenesse il suo estremo destro  $b = \max I$ , potrei considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(b) = u(b) \end{cases}$$

e trovarne una soluzione  $v : [b - \delta, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , per un certo  $\delta > 0$ . Sia allora  $u_* : I \cup [b, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita da

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t \in I \\ v(t) & \text{se } t \in ]b, b + \delta]. \end{cases}$$

Si può verificare che  $u_*$  è derivabile (anche nel punto  $b$ ) ed è un prolungamento di  $u$ , in contraddizione con l’ipotesi. Analogamente se  $I$  contenesse il suo estremo sinistro. ■

**Teorema 12** Sia  $f$  localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora ogni soluzione  $u$  del problema (PC) si può prolungare in modo univoco a un intervallo massimale  $] \alpha, \omega [$ , con  $-\infty \leq \alpha < \omega \leq +\infty$ .

Dimostrazione. Si consideri l’insieme  $\mathcal{S}$  di tutte le possibili soluzioni del problema (PC). Ogni  $u \in \mathcal{S}$  avrà per dominio un intervallo, che indichiamo con  $I_u$ . Sia  $I_* = \cup_{u \in \mathcal{S}} I_u$  e si definisca  $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$  ponendo  $u_*(t) = u(t)$  se  $t \in I_u$ . Bisogna verificare che questa è una buona definizione, cioè che il valore di  $u_*(t)$  non dipende dalla scelta dell’intervallo  $I_u$  a cui  $t$  appartiene. Sia dunque  $t \in I_u \cap I_v$ , dove  $u : I_u \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $v : I_v \rightarrow \mathbb{R}^N$  sono due soluzioni del problema (PC). Per l’unicità, si ha che  $u = v$  su  $I_u \cap I_v$ , per cui  $u(t) = v(t)$ .

Se ora  $u^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}^N$  è una soluzione che prolunga  $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$ , allora  $u^* \in \mathcal{S}$ , perciò per costruzione  $I^* \subseteq I_*$ . Quindi  $u_*$  non ammette prolungamenti: è una soluzione massimale. ■

**Teorema 13** *Sia  $f$  localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, e sia  $u$  soluzione del problema (PC) sul suo intervallo massimale  $] \alpha, \omega [$ . Allora per ogni compatto  $K_0 \subseteq \Omega$  contenente  $(t_0, x_0)$  esistono un  $a_0 \in ] \alpha, t_0 [$  e un  $b_0 \in ] t_0, \omega [$  tali che*

$$t \in ] \alpha, a_0 [ \cup ] b_0, \omega [ \Rightarrow (t, u(t)) \notin K_0 .$$

Per la dimostrazione di questo teorema, avremo bisogno del seguente risultato preliminare.

**Lemma 14** *Sia  $f$  localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, e sia  $u$  soluzione del problema (PC) su un intervallo  $] a, b [$ . Se esiste una successione crescente  $(t_n)_n$  in  $] t_0, b [$  tale che  $t_n \rightarrow b^-$  e  $u(t_n) \rightarrow \bar{u}$ , per un certo  $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$ , con  $(b, \bar{u}) \in \Omega$ , allora la soluzione  $u$  è prolungabile all'intervallo  $] a, b ]$ .*

Dimostrazione. Definiamo la funzione  $\tilde{u} : ] a, b ] \rightarrow \mathbb{R}^N$  in questo modo:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t < b \\ \bar{u} & \text{se } t = b . \end{cases}$$

Siccome

$$u(t_n) = u_0 + \int_{t_0}^{t_n} f(s, u(s)) ds ,$$

passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  otteniamo

$$\tilde{u}(b) = u_0 + \int_{t_0}^b f(s, u(s)) ds = u_0 + \int_{t_0}^b f(s, \tilde{u}(s)) ds ,$$

e pertanto

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{u}(s)) ds , \quad \text{per ogni } t \in ] a, b ] .$$

Se dimostriamo che  $\tilde{u}$  è continua, per il Teorema 3 avremo che essa è soluzione del problema (PC) sull'intervallo  $] a, b ]$ , quindi è un prolungamento di  $u$ , il che è una contraddizione. Faremo quindi vedere che  $\tilde{u}$  è continua anche in  $b$ , ossia che  $\lim_{t \rightarrow b^-} u(t) = \bar{u}$ .

Siano  $r_1 > 0$  e  $r_2 > 0$  tali che

$$K := [b - r_1, b + r_1] \times \bar{B}(\bar{u}, r_2) \subseteq \Omega ,$$

e sia

$$M = \max\{\|f(t, u)\| : (t, u) \in K\} .$$

Fissiamo  $\varepsilon \in ]0, r_2[$ . Esiste un  $\bar{n}$  tale che, se  $n \geq \bar{n}$ , allora

$$b - t_n < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad \|u(t_n) - \bar{u}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vogliamo ora dimostrare che

$$t \in [t_{\bar{n}}, b[ \Rightarrow \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per assurdo, supponiamo che l'insieme

$$E = \left\{ t \in [t_{\bar{n}}, b[ : \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

sia non vuoto, e poniamo  $\tau = \inf E$ . Per la continuità,  $\|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| = \frac{\varepsilon}{2}$ , e quindi  $\tau > t_{\bar{n}}$ . Notiamo inoltre che

$$\xi \in [t_{\bar{n}}, \tau[ \Rightarrow \|u(\xi) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (\xi, u(\xi)) \in K.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| &\leq \sup\{\|u'(\xi)\| : \xi \in [t_{\bar{n}}, \tau]\}(\tau - t_{\bar{n}}) \\ &= \sup\{\|f(\xi, u(\xi))\| : \xi \in [t_{\bar{n}}, \tau]\}(\tau - t_{\bar{n}}) \\ &\leq M(\tau - t_{\bar{n}}) \leq M(b - t_{\bar{n}}) < M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

una contraddizione. ■

Naturalmente, vale un lemma analogo se  $t_n \rightarrow a^+$ .

Dimostrazione del Teorema 13. Se  $\omega = +\infty$ , basta prendere  $b_0 > t_0$  sufficientemente grande. Se  $\omega \in \mathbb{R}$ , supponiamo che esista un compatto  $K_0 \subseteq \Omega$  e una successione crescente  $(t_n)_n$  in  $]t_0, \omega[$  tale che  $t_n \rightarrow \omega^-$  e  $(t_n, u(t_n)) \in K_0$ . Per la compattezza di  $K_0$ , esiste una sottosuccessione  $(t_{n_k})_k$  tale che  $(t_{n_k}, u(t_{n_k})) \rightarrow (\omega, \bar{u}) \in K_0$ , per un certo  $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$ . Per il Lemma 14, la soluzione  $u$  si può estendere a  $]a, \omega]$ , una contraddizione. Analogo ragionamento per  $\alpha$ . ■

Osserviamo che, anche quando l'insieme  $\Omega$  ha una proiezione sulla coordinata  $t$  che coincide con tutto  $\mathbb{R}$ , l'intervallo di esistenza massimale  $]a, \beta[$  potrebbe essere un sottoinsieme proprio di  $\mathbb{R}$ . Ad esempio, sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(u) = u^2$ . Si verifica subito che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

ha come soluzione  $u(t) = (1 - t)^{-1}$ , per cui  $]a, \beta[ = ]-\infty, 1[$ .

Per garantire l'“esistenza globale” della soluzione  $u$ , è necessario controllarne la crescita in norma. Ad esempio, si può dimostrare il seguente risultato, dove  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ .

**Teorema 15** Sia  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Se inoltre esiste una funzione continua  $\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  per cui

$$\|f(t, v)\| \leq \ell(t)(\|v\| + 1), \quad (4)$$

per ogni  $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ , allora la soluzione del problema (PC) si può prolungare in modo univoco a tutto  $\mathbb{R}$ .

Nella dimostrazione avremo bisogno del seguente

**Lemma 16 (di Gronwall)** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $t_0 \in I$  e  $\nu : I \rightarrow [0, +\infty[$  una funzione continua. Se esistono  $\alpha, \beta \in [0, +\infty[$  tali che

$$\nu(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t \nu(s) ds \right|, \quad \text{per ogni } t \in I,$$

allora

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}, \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Dimostrazione del Lemma. Consideriamo dapprima l'intervallo  $I \cap [t_0, +\infty[$ . Fissiamo un  $\varepsilon > 0$  e definiamo la funzione  $\phi_\varepsilon : I \cap [t_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

$$\phi_\varepsilon(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_{t_0}^t \nu(s) ds.$$

Allora, per ogni  $t \in I \cap [t_0, +\infty[$ ,

$$\phi_\varepsilon'(t) = \beta \nu(t) \leq \beta \phi_\varepsilon(t),$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \ln \phi_\varepsilon(t) \leq \beta.$$

Integrando su  $[t_0, t]$ ,

$$\ln \frac{\phi_\varepsilon(t)}{\phi_\varepsilon(t_0)} \leq \beta(t - t_0),$$

da cui

$$\nu(t) \leq \phi_\varepsilon(t) \leq \phi_\varepsilon(t_0) e^{\beta(t-t_0)} = (\alpha + \varepsilon) e^{\beta(t-t_0)},$$

per ogni  $t \in I \cap [t_0, +\infty[$  e ogni  $\varepsilon > 0$ . Passando al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , si ottiene

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}, \quad \text{per ogni } t \in I \cap [t_0, +\infty[.$$

Consideriamo ora l'intervallo  $I \cap ]-\infty, t_0]$ . Definiamo l'intervallo  $J = \{\tau \in \mathbb{R} : \tau = 2t_0 - t, \text{ con } t \in I\}$  e la funzione  $w : J \rightarrow [0, +\infty[$  definita da  $w(\tau) = \nu(2t_0 - \tau)$ . Se  $t \in I \cap ]-\infty, t_0]$ , allora  $\tau = 2t_0 - t \in J \cap [t_0, +\infty[$  e

$$w(\tau) = \nu(2t_0 - \tau) \leq \alpha + \beta \int_{2t_0 - \tau}^{t_0} \nu(2t_0 - s) ds = \alpha + \beta \int_{t_0}^{\tau} w(\sigma) d\sigma.$$

Per quanto visto sopra,

$$w(\tau) \leq \alpha e^{\beta(\tau-t_0)}, \quad \text{per ogni } \tau \in J \cap [t_0, +\infty[,$$

per cui

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta(t_0-t)}, \quad \text{per ogni } t \in I \cap ]-\infty, t_0].$$

La dimostrazione è così completa. ■

Dimostrazione del Teorema 15. Sia  $u : ]\alpha, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}^N$  una soluzione del problema (PC), definita sul suo intervallo massimale, con  $\alpha < t_0 < \omega$ . Supponiamo per assurdo che  $\omega \in \mathbb{R}$ , e poniamo

$$\ell_1 = \max\{\ell(t) : t \in [t_0, \omega]\}, \quad R = [\|u_0\| + \ell_1|\omega - t_0|] e^{\ell_1(\omega-t_0)}.$$

Preso il compatto  $K_0 = [t_0, \omega] \times \overline{B}(0, R)$ , possiamo applicare il Teorema 13 e trovare un  $b_0 \in ]t_0, \omega[$  tale che

$$t \in ]b_0, \omega[ \Rightarrow u(t) \notin \overline{B}(0, R).$$

D'altra parte, per ogni  $t \in [t_0, \omega[$ ,

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \left\| u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \ell(s)(\|u(s)\| + 1) ds \\ &\leq [\|u_0\| + \ell_1(\omega - t_0)] + \ell_1 \int_{t_0}^t \|u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall, con  $\nu(t) = \|u(t)\|$ , abbiamo che, per ogni  $t \in [t_0, \omega[$ ,

$$\|u(t)\| \leq [\|u_0\| + \ell_1(\omega - t_0)] e^{\ell_1(t-t_0)} < R,$$

una contraddizione. ■

## 5 Dipendenza dai dati

Nelle applicazioni è importante avere una “dipendenza continua” dai dati del problema che si vuole studiare. Infatti, le misurazioni non sono mai esatte, ma presentano delle piccole imprecisioni, che però non dovrebbero influire troppo sulle previsioni date dal modello matematico.

Nell'enunciato seguente, supponiamo per semplicità che sia  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ .

**Teorema 17** Sia  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile e sia  $\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  una funzione continua tale che

$$\|f(t, v)\| \leq \ell(t)(\|v\| + 1), \quad (5)$$

per ogni  $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ . Sia  $u$  la soluzione massimale del problema (PC). Allora  $u$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Inoltre, fissati  $a, b$  tali che  $a < t_0 < b$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che, se  $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in \Omega$  e  $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  soddisfano

$$|\tilde{t}_0 - t_0| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,^4$$

allora ogni soluzione massimale  $\tilde{u}$  del problema di Cauchy

$$(\widetilde{PC}) \quad \begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

è definita su tutto  $\mathbb{R}$  e

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Dimostrazione. Per il Teorema 15, la soluzione  $u$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Prenderemo inoltre  $\delta \in ]0, 1]$ , per cui si trova facilmente una funzione continua  $\hat{\ell} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  tale che, se  $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta$ , allora

$$\|\tilde{f}(t, v)\| \leq \hat{\ell}(t)(\|v\| + 1),$$

per ogni  $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ . Tutte le soluzioni  $\tilde{u}$  sono pertanto definite su tutto  $\mathbb{R}$ , e seguendo la dimostrazione del Teorema 15, ponendo  $\hat{\ell}_1 = \max\{\hat{\ell}(t) : t \in [a, b]\}$ , se  $\tilde{t}_0 \in [a, b]$  e  $\|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta$  si ha che

$$\|\tilde{u}(t)\| \leq [(\|u_0\| + 1) + \hat{\ell}_1(b - a)]e^{\hat{\ell}_1(b-a)} := R.$$

Sia  $K = [a, b] \times \overline{B}(0, R)$ , un compatto, sia  $L_K$  la relativa costante di Lipschitz di  $f$  su  $K$  (vedi la Proposizione 6), e sia

$$M = \max\{\|f(t, v)\| : (t, v) \in K\}.$$

Siccome  $\delta \leq 1$ , abbiamo che

$$\max\{\|\tilde{f}(t, v)\| : (t, v) \in [a, b] \times \overline{B}(0, R)\} \leq M + 1.$$

Scriviamo

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad \tilde{u}(t) = \tilde{u}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^t \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds.$$

---

<sup>4</sup>Qui  $\|g\|_\infty = \sup\{g(t, x) : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\}$ .

Allora, per  $t > t_0$ ,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - \tilde{u}(t)\| &= \left\| u_0 - \tilde{u}_0 + \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{u}(s))) ds + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds \right\| \\
&\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\| ds + \\
&\quad + \int_{t_0}^t \|f(s, \tilde{u}(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{u}(s))\| ds + \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\tilde{f}(s, \tilde{u}(s))\| ds \right| \\
&\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + L_K \int_{t_0}^t \|u(s) - \tilde{u}(s)\| ds + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0|.
\end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - \tilde{u}(t)\| &\leq \left[ \|u_0 - \tilde{u}_0\| + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L_K(t-t_0)} \\
&\leq \left[ \|u_0 - \tilde{u}_0\| + (b-a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M+1)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L_K(b-a)}.
\end{aligned}$$

Analogamente se  $t < t_0$ . Da qui la conclusione.  $\blacksquare$

Si potrebbe dimostrare un risultato più generale, che qui solo enunciamo.

**Teorema 18** *Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Indichiamo con  $u$  la soluzione del problema (PC), definita sull'intervallo massimale  $]\alpha, \beta[$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  e ogni intervallo compatto  $[a, b] \subseteq ]\alpha, \beta[$ , contenente al suo interno  $t_0$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che, se  $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in \Omega$  e  $\tilde{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$  soddisfano*

$$|\tilde{t}_0 - t_0| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,$$

allora ogni soluzione  $\tilde{u}$  del problema di Cauchy

$$(\widetilde{PC}) \quad \begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

si può estendere al dominio  $[a, b]$  e

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

## 6 Sistemi lineari

Studiamo un “sistema lineare” del tipo

$$u' = \mathbb{A}(t)u + b(t), \tag{6}$$

dove  $\mathbb{A}(t)$  è una matrice  $N \times N$  e  $b(t)$  un vettore di  $\mathbb{R}^N$ , entrambi dipendenti in modo continuo da  $t \in \mathbb{R}$ . Quindi, se indichiamo con  $\mathcal{M}_N$  l'insieme delle matrici  $N \times N$ , le due funzioni  $\mathbb{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_N$  e  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  sono continue.

Dalla teoria generale possiamo subito affermare che i problemi di Cauchy associati all'equazione (6) avranno soluzione unica e globalmente definita.

Neel caso in cui sia  $b = 0$ , avremo l'equazione autonoma associata

$$u' = \mathbb{A}(t)u. \quad (7)$$

Nella pratica può essere utile la seguente semplice osservazione.

**Proposizione 19** *Sia  $\bar{u}(t)$  una soluzione particolare di (6). Allora ogni altra soluzione  $u(t)$  di (6) si ottiene come somma  $u(t) = \bar{u}(t) + v(t)$ , dove  $v(t)$  è una qualsiasi soluzione dell'equazione autonoma associata (7).*

Dimostrazione. Se  $u(t) = \bar{u}(t) + v(t)$ , con  $v(t)$  soluzione dell'equazione (7), allora

$$\begin{aligned} u'(t) &= \bar{u}'(t) + v'(t) = [\mathbb{A}(t)\bar{u}(t) + b(t)] + \mathbb{A}(t)v(t) \\ &= \mathbb{A}(t)(\bar{u}(t) + v(t)) + b(t) = \mathbb{A}(t)u(t) + b(t). \end{aligned}$$

Viceversa, se  $u(t)$  è una soluzione di (6), allora  $u = \bar{u} + (u - \bar{u})$ , e

$$(u - \bar{u})'(t) = [\mathbb{A}(t)\bar{u}(t) + b(t)] - [\mathbb{A}(t)\bar{u}(t) + b(t)] = \mathbb{A}(t)(u - \bar{u})(t),$$

per cui  $u - \bar{u}$  è soluzione di (7). ■

## 6.1 L'equazione autonoma

Indicheremo con  $\mathcal{S}$  l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione autonoma (7). Ricordiamo che ogni  $u \in \mathcal{S}$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Proposizione 20** *L'insieme  $\mathcal{S}$  delle soluzioni di (7) è un sottospazio vettoriale di  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ . Esso ha dimensione  $N$ .*

Dimostrazione. È facile vedere che, se  $u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  sono soluzioni di (7) e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sono due costanti, allora anche  $\alpha u_1 + \beta u_2$  è una soluzione. Pertanto  $\mathcal{S}$  è un sottospazio vettoriale di  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ .

Fissato  $t_0$ , consideriamo la funzione  $\delta_{t_0} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$  che a ogni soluzione  $u$  di (7) associa il valore  $u(t_0)$ . Si tratta di un'applicazione lineare. Inoltre, per l'unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, per ogni  $u_0 \in \mathbb{R}^N$  esiste un'unica soluzione  $u$  di (7) tale che  $u(t_0) = u_0$ . L'applicazione  $\delta_{t_0}$  è quindi biettiva, dunque un isomorfismo tra spazi vettoriali. Di conseguenza,  $\dim \mathcal{S} = \dim \mathbb{R}^N = N$ . ■

Può essere utile la seguente

**Proposizione 21** *Date  $\phi_1, \dots, \phi_p \in \mathcal{S}$ , le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i)  $\phi_1, \dots, \phi_p$  sono linearmente indipendenti;
- (ii) esiste  $t_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $\phi_1(t_0), \dots, \phi_p(t_0)$  sono linearmente indipendenti;
- (iii) per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si ha che  $\phi_1(t), \dots, \phi_p(t)$  sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. È chiaro che (iii) implica (ii).

Dimostriamo che (ii) implica (i). Sia  $t_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $\phi_1(t_0), \dots, \phi_p(t_0)$  sono linearmente indipendenti. Se una combinazione lineare  $c_1\phi_1 + \dots + c_p\phi_p$  è nulla, per definizione si avrà che  $c_1\phi_1(t) + \dots + c_p\phi_p(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , quindi in particolare  $c_1\phi_1(t_0) + \dots + c_p\phi_p(t_0) = 0$ . Da (ii) segue allora che  $c_1 = \dots = c_p = 0$ , da cui (i).

Verifichiamo infine che (i) implica (iii). Supponiamo che valga (i) e che per assurdo non valga (iii). Allora esiste  $t_0 \in \mathbb{R}$  per cui  $\phi_1(t_0), \dots, \phi_p(t_0)$  sono linearmente dipendenti, cioè esistono  $c_1, \dots, c_p$  non tutti nulli tali che  $c_1\phi_1(t_0) + \dots + c_p\phi_p(t_0) = 0$ . Poniamo  $u = c_1\phi_1 + \dots + c_p\phi_p$ . Essendo  $\mathcal{S}$  spazio vettoriale, si ha che  $u \in \mathcal{S}$ , per cui  $u$  è soluzione del problema di Cauchy  $u' = \mathbb{A}(t)u$ ,  $u(t_0) = 0$ . Ma siccome anche la funzione nulla è soluzione di tale problema di Cauchy, per unicità si ha che  $u = 0$ , ossia  $c_1\phi_1 + \dots + c_p\phi_p = 0$ , in contraddizione con (i). ■

**Definizione 22** Si chiama “funzione matrice fondamentale” (brevemente “matrice fondamentale”) associata a (7) una qualsiasi funzione  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_N$  tale che, indicati con  $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$  i vettori corrispondenti alle colonne della matrice  $\Phi(t)$ , si ha che  $\phi_1, \dots, \phi_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  sono una base di  $\mathcal{S}$ .

**Proposizione 23** Se  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_N$  è una matrice fondamentale associata a (7), allora

$$\Phi'(t) = \mathbb{A}(t)\Phi(t),$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Inoltre, ogni  $u \in \mathcal{S}$  può essere rappresentata come  $u(t) = \Phi(t)c$ , per un certo  $c \in \mathbb{R}^N$ .

Dimostrazione. Fissata una matrice fondamentale  $\Phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_N(t))$ , si ha

$$\Phi'(t) = (\phi_1'(t), \dots, \phi_N'(t)) = (\mathbb{A}(t)\phi_1(t), \dots, \mathbb{A}(t)\phi_N(t)) = \mathbb{A}(t)\Phi(t).$$

Si vede poi che, se  $u(t) = \Phi(t)c$ , per un certo  $c \in \mathbb{R}^N$ , allora

$$u'(t) = \Phi'(t)c = [\mathbb{A}(t)\Phi(t)]c = \mathbb{A}(t)[\Phi(t)c] = \mathbb{A}(t)u(t),$$

per cui  $u$  è una soluzione di (7). Viceversa, presa una soluzione  $u$  di (7), sia ad esempio  $u(t_0) = u_0$ . Allora, ponendo  $c = \Phi(t_0)^{-1}u_0$ , la funzione  $w(t) = \Phi(t)c$  è una soluzione di (7) tale che  $w(t_0) = \Phi(t_0)\Phi(t_0)^{-1}u_0 = u_0$  e quindi, per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy, deve coincidere con  $u(t)$ . ■

## 6.2 L'equazione non autonoma

Il seguente teorema di Lagrange illustra il metodo della “variazione delle costanti”.

**Teorema 24** *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \mathbb{A}(t)u + b(t), \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (8)$$

ha come soluzione

$$u(t) = \Phi(t) \left( \Phi(t_0)^{-1} u_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} b(s) ds \right).$$

dove  $\Phi(t)$  è una qualsiasi matrice fondamentale relativa al sistema autonomo associato (7).

Dimostrazione. La generica soluzione dell'equazione autonoma associata  $u = A(t)u$  è del tipo  $u(t) = \Phi(t)c$ , dove  $\Phi(t)$  è una qualsiasi matrice fondamentale associata a (7) e  $c$  è un generico elemento di  $\mathbb{R}^N$ . Cerchiamo una funzione derivabile  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che la funzione  $u(t) = \Phi(t)c(t)$  sia soluzione del problema (8). Anzitutto dovrà essere  $\Phi(t_0)c(t_0) = u_0$ , da cui  $c(t_0) = \Phi(t_0)^{-1}u_0$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Phi(t)c(t)) &= \mathbb{A}(t)(\Phi(t)c(t)) + b(t) \\ \Leftrightarrow \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) &= (\mathbb{A}(t)\Phi(t))c(t) + b(t) \\ \Leftrightarrow \Phi(t)c'(t) &= b(t) \\ \Leftrightarrow c'(t) &= \Phi(t)^{-1}b(t). \end{aligned}$$

Allora

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t c'(s) ds = \Phi(t_0)^{-1}u_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}b(s) ds,$$

da cui la tesi. ■

**Esempio.** Vogliamo risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + 4x = 3t, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Lo scriviamo nella forma canonica come

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -4x + 3t, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Una matrice fondamentale associata al sistema autonomo è

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) & \cos(2t) \\ 2 \cos(2t) & -2 \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo l'inversa, osservando che il suo determinante è  $-2$ :

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) & -\cos(2t) \\ -2 \cos(2t) & \sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t) & \frac{1}{2} \cos(2t) \\ \cos(2t) & -\frac{1}{2} \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

La soluzione  $u(t) = (x(t), y(t))$  è data quindi da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin(2t) & \cos(2t) \\ 2 \cos(2t) & -2 \sin(2t) \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{3}{2}s \cos(2s) \\ -\frac{3}{2}s \sin(2s) \end{pmatrix} ds \right] \\ &= \begin{pmatrix} \sin(2t) & \cos(2t) \\ 2 \cos(2t) & -2 \sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t \sin(2t) + \frac{3}{8} \cos(2t) + \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4}t \cos(2t) - \frac{3}{8} \sin(2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \sin(2t) + \frac{3}{4}t \\ \frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{3}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione di (9) è quindi  $x(t) = \frac{1}{8} \sin(2t) + \frac{3}{4}t$ .

Un modo equivalente: scriviamo la soluzione cercata  $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  di (10) come  $u(t) = \Phi(t)c(t)$ , e cerchiamo di trovare la funzione  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Indicando con  $c_1(t), c_2(t)$  le componenti di  $c(t)$ , avremo che

$$x(t) = \sin(2t)c_1(t) + \cos(2t)c_2(t), \quad y(t) = 2 \cos(2t)c_1(t) - 2 \sin(2t)c_2(t).$$

Derivando la prima, abbiamo che

$$x'(t) = 2 \cos(2t)c_1(t) + \sin(2t)c_1'(t) - 2 \sin(2t)c_2(t) + \cos(2t)c_2'(t).$$

Essendo  $x'(t) = y(t)$ , vediamo che deve essere

$$\sin(2t)c_1'(t) + \cos(2t)c_2'(t) = 0.$$

Procediamo quindi derivando una seconda volta:

$$x''(t) = -4 \sin(2t)c_1(t) + 2 \cos(2t)c_1'(t) - 2 \cos(2t)c_2(t) - 2 \sin(2t)c_2'(t),$$

e imponendo che  $x(t)$  sia soluzione dell'equazione differenziale, otteniamo che

$$2 \cos(2t)c_1'(t) - 2 \sin(2t)c_2'(t) = 3t.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \sin(2t)c_1'(t) + \cos(2t)c_2'(t) = 0 \\ 2 \cos(2t)c_1'(t) - 2 \sin(2t)c_2'(t) = 3t, \end{cases}$$

troviamo che

$$c_1'(t) = \frac{3}{2}t \cos(2t), \quad c_2'(t) = -\frac{3}{2}t \sin(2t),$$

da cui

$$c_1(t) = \frac{3}{4}t \sin(2t) + \frac{3}{8} \cos(2t) + \gamma_1, \quad c_2(t) = \frac{3}{4}t \cos(2t) - \frac{3}{8} \sin(2t) + \gamma_2,$$

dove  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono costanti da determinarsi. Troviamo così

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{3}{4}t \sin(2t) + \frac{3}{8} \cos(2t) + \gamma_1\right) \sin(2t) + \left(\frac{3}{4}t \cos(2t) - \frac{3}{8} \sin(2t) + \gamma_2\right) \cos(2t) \\ &= \frac{3}{4}t + \gamma_1 \sin(2t) + \gamma_2 \cos(2t). \end{aligned}$$

Imponendo la condizione  $x(0) = 0$  abbiamo che  $\gamma_2 = 0$ . Inoltre, imponendo che sia  $x'(0) = 1$  abbiamo che  $\gamma_1 = \frac{1}{8}$ . La soluzione del problema (9) è quindi  $x(t) = \frac{3}{4}t + \frac{1}{8} \sin(2t)$ .

Si noti che c'è un procedimento molto più rapido per trovare la soluzione di (9). Infatti, si vede subito che una soluzione particolare dell'equazione  $x'' + 4x = 3t$  è  $\bar{x}(t) = \frac{3}{4}t$ . Allora tutte le soluzioni dell'equazione sono del tipo

$$x(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t) + \frac{3}{4}t.$$

Imponendo la condizione  $x(0) = 0$  vediamo che deve essere  $\beta = 0$ . Inoltre, imponendo la condizione  $x'(0) = 1$  troviamo  $\alpha = \frac{1}{8}$ . Quindi, la soluzione del problema (9) è  $x(t) = \frac{1}{8} \sin(2t) + \frac{3}{4}t$ .

**Nota.** Una particolare matrice fondamentale è data da<sup>5</sup>

$$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^t \mathbb{A}(s) ds}.$$

Si può quindi scrivere una soluzione del problema (8) nella forma

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t \mathbb{A}(s) ds} \left( u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} \mathbb{A}(s) ds} b(\sigma) d\sigma \right),$$

che è analoga alla formula trovata nel caso scalare.

---

<sup>5</sup>Per far questo, bisogna però definire l'esponenziale di una matrice. Lo si può fare in modi diversi, ispirandosi alle note formule

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Se  $\mathbb{A}$  è una matrice  $N \times N$ , si può in effetti definire la matrice  $e^{\mathbb{A}}$  in uno di questi due modi:

$$e^{\mathbb{A}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{1}{n} \mathbb{A}\right)^n, \quad e^{\mathbb{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbb{A}^n,$$

con  $\mathbb{A}^0 = I$ . Il calcolo esplicito della matrice potrebbe però non essere agevole.

### 6.3 Equazioni lineari di ordine $N$

Consideriamo un'equazione differenziale lineare di ordine  $N$ :

$$x^{(N)} + a_{N-1}(t)x^{(N-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = h(t). \quad (11)$$

Possiamo riscriverla nella forma

$$u' = \mathbb{A}(t)u + b(t),$$

con  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ , ponendo

$$u_1 = x, \quad u_2 = x', \quad \dots, \quad u_N = x^{(N-1)},$$

e

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Spesso in questo caso una matrice fondamentale  $\Phi(t)$  prende il nome di “matrice wronskiana” e si denota con  $W(t)$ .

**Proposizione 25** *Se  $x_1, \dots, x_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni linearmente indipendenti, di classe  $C^{n-1}$ , allora le funzioni  $\phi_1, \dots, \phi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  definite da*

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \phi_p(t) = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ x_p'(t) \\ \vdots \\ x_p^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}$$

*sono linearmente indipendenti, e viceversa.*

Dimostrazione. Siano  $x_1, \dots, x_p$  linearmente indipendenti, e sia  $\alpha_1\phi_1 + \dots + \alpha_p\phi_p = 0$ . Allora anche  $\alpha_1x_1 + \dots + \alpha_px_p = 0$ , da cui  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ . Pertanto,  $\phi_1, \dots, \phi_p$  sono linearmente indipendenti.

Viceversa, siano  $\phi_1, \dots, \phi_p$  linearmente indipendenti, e sia  $\alpha_1x_1 + \dots + \alpha_px_p = 0$ . Derivando, si trova che

$$\alpha_1x_1' + \dots + \alpha_px_p' = 0, \quad \dots, \quad \alpha_1x_1^{(n-1)} + \dots + \alpha_px_p^{(n-1)} = 0,$$

per cui  $\alpha_1\phi_1 + \dots + \alpha_p\phi_p = 0$ . Ne segue che  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ , per cui  $x_1, \dots, x_p$  sono linearmente indipendenti. ■

Quindi, se  $x_1, \dots, x_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione autonoma

$$x^{(N)} + a_{N-1}(t)x^{(N-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0.$$

potremo scrivere la matrice wronskiana

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_N(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_N'(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(N-1)}(t) & \dots & x_N^{(N-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Ci concentreremo sul caso particolare “a coefficienti costanti”

$$x^{(N)} + a_{N-1}x^{(N-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = h(t). \quad (12)$$

L'equazione autonoma associata è

$$x^{(N)} + a_{N-1}x^{(N-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0. \quad (13)$$

Si definisce il “polinomio caratteristico”

$$p(\lambda) = \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + a_{N-2}\lambda^{N-2} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Se  $p(\lambda)$  ha  $n$  radici reali distinte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ , si vede facilmente che sono soluzioni linearmente indipendenti di (13) le seguenti:

$$e^{\lambda_1 t}, \quad e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad e^{\lambda_N t}.$$

Se invece  $\lambda_k$  è una radice reale di molteplicità  $\nu_k$ , alla funzione  $e^{\lambda_k t}$  bisognerà sostituire

$$e^{\lambda_k t}, \quad t e^{\lambda_k t}, \quad \dots, \quad t^{\nu_k-1} e^{\lambda_k t}.$$

Se  $p(\lambda)$  ha un autovalore complesso  $\lambda = \alpha + i\beta$ , con  $\beta \neq 0$ , automaticamente ha anche l'autovalore complesso coniugato  $\alpha - i\beta$ . In questo caso, al posto di  $e^{\lambda t}$  bisogna considerare le soluzioni

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Quindi, se l'autovalore  $\lambda$  ha molteplicità  $\nu$ , bisognerà considerare le seguenti:

$$\begin{aligned} & e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad t e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad \dots, \quad t^{\nu-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t), \\ & e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad t e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad \dots, \quad t^{\nu-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda una soluzione particolare dell'equazione (12), si può utilizzare il metodo della variazione delle costanti (Teorema di Lagrange). In alternativa, c'è il cosiddetto “metodo per simiglianza”, che può essere applicato quando  $h(t)$  è un polinomio  $P(t)$ , oppure è del tipo

$$P(t)e^{\gamma t}, \quad P(t)e^{\gamma t} \cos(\mu t), \quad P(t)e^{\gamma t} \sin(\mu t).$$

Caso 1:  $h(t) = P(t)$  è un polinomio di grado  $m$ . Allora una soluzione particolare  $x(t)$  può essere cercata tra

- 1a. i polinomi  $Q(t)$  di grado  $m$  se 0 non è radice dell'equazione caratteristica;  
 1b. i polinomi della forma  $t^\nu Q(t)$  con  $Q(t)$  polinomio di grado  $m$ , se 0 è radice di molteplicità  $\nu$  dell'equazione caratteristica.

Caso 2:  $h(t) = P(t)e^{\gamma t}$ , con  $P(t)$  polinomio di grado  $m$ . Allora cerchiamo  $x(t)$  nella forma

- 2a.  $Q(t)e^{\gamma t}$  con  $Q(t)$  polinomio di grado  $m$ , se  $\gamma$  non è radice dell'equazione caratteristica;  
 2b.  $t^\nu Q(t)e^{\gamma t}$ , con  $Q(t)$  polinomio di grado  $m$ , se  $\gamma$  è radice di molteplicità  $\nu$  dell'equazione caratteristica.

Caso 3:  $h(t) = P(t)e^{\gamma t} \cos(\mu t)$  oppure  $h(t) = P(t)e^{\gamma t} \sin(\mu t)$ , con  $P(t)$  polinomio di grado  $m$ . Allora cerchiamo  $x(t)$  nella forma

- 3a.  $Q(t)e^{\gamma t}(a \cos(\mu t) + b \sin(\mu t))$ , con  $Q(t)$  polinomio di grado  $m$ , se  $\gamma + i\mu$  non è radice dell'equazione caratteristica;  
 3b.  $t^\nu Q(t)e^{\gamma t}(a \cos(\mu t) + b \sin(\mu t))$ , con  $Q(t)$  polinomio di grado  $m$ , se  $\gamma + i\mu$  è radice di molteplicità  $\nu$  dell'equazione caratteristica.

Se  $h(t)$  dovesse essere combinazione lineare di alcune delle formule precedenti, si cercherà  $x(t)$  come combinazione lineare delle rispettive funzioni qui sopra evidenziate.

## 6.4 Il fenomeno della risonanza

Consideriamo l'equazione del secondo ordine

$$x'' + \lambda x = e(t), \quad (14)$$

dove  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e  $T$ -periodica, mentre  $\lambda > 0$  è un numero reale.

Siccome  $\lambda > 0$ , le soluzioni dell'equazione

$$x'' + \lambda x = 0 \quad (15)$$

sono tutte periodiche di periodo  $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ :

$$x(t) = a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t).$$

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\lambda x, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono ellissi di equazione  $x^2 + \lambda y^2 = c$ , con  $c \geq 0$ , che circondano l'origine, il quale pertanto è un **centro isocrono**.

Consideriamo ora, sempre per  $\lambda > 0$ , l'equazione (14) e scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\lambda x + e(t). \end{cases}$$

Ponendo  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , la soluzione con punto iniziale  $u(0) = u_0$  è data da

$$u(t) = W(t) \left( u_0 + \int_0^t W^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ e(s) \end{pmatrix} ds \right),$$

dove  $W(t)$  è la matrice wronskiana con  $W(0) = I$ :

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} t) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t) \\ -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} t) & \cos(\sqrt{\lambda} t) \end{pmatrix}.$$

Scrivendo  $u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  e sviluppando, essendo

$$W^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} s) & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} s) \\ \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} s) & \cos(\sqrt{\lambda} s) \end{pmatrix},$$

troviamo

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\sqrt{\lambda} t) \left( u_0 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t) \left( v_0 + \int_0^t e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds \right), \\ y(t) &= -\sin(\sqrt{\lambda} t) \left( \sqrt{\lambda} u_0 - \int_0^t e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds \right) + \\ &\quad + \cos(\sqrt{\lambda} t) \left( v_0 + \int_0^t e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds \right). \end{aligned}$$

Distinguiamo due casi con caratteristiche completamente diverse.

I caso. Se  $\lambda = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$ , per un certo intero positivo  $N$ , considerando i coefficienti di Fourier <sup>6</sup>

$$a_N = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cos\left(\frac{2\pi N}{T} s\right) ds, \quad b_N = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sin\left(\frac{2\pi N}{T} s\right) ds,$$

si vede che

$$x(T) = u_0 - \frac{T^2 b_N}{4\pi N}, \quad y(T) = v_0 + \frac{T a_N}{2}.$$

Quindi, in questo caso, ci sono soluzioni  $T$ -periodiche di (14) se e solo se  $a_N = b_N = 0$ . In tal caso, **tutte le soluzioni** di (14) **sono  $T$ -periodiche**.

---

<sup>6</sup>Ricordiamo che si ha

$$e(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right).$$

Al contrario, se  $a_N \neq 0$  o  $b_N \neq 0$ , **tutte le soluzioni** di (14) **sono illimitate**, sia in passato che in futuro. Si vede infatti che, per  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$x(kT) = u_0 - k \frac{T^2 b_N}{4\pi N}, \quad y(kT) = v_0 + k \frac{T a_N}{2}.$$

II caso. Se  $\lambda > 0$  è tale che  $\lambda \neq (\frac{2\pi n}{T})^2$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , poniamo

$$\alpha_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds, \quad \beta_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds.$$

Cerchiamo una soluzione  $T$ -periodica di (14) imponendo che sia  $u(T) = u_0$ . Risolvendo il sistema  $\{u(T) = u_0, v(T) = v_0\}$ , ossia

$$\begin{cases} x_0 = \cos(\sqrt{\lambda} T) \left( x_0 - \frac{T}{2\sqrt{\lambda}} \beta_\lambda \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} T) \left( y_0 + \frac{T}{2} \alpha_\lambda \right), \\ y_0 = -\sin(\sqrt{\lambda} T) \left( \sqrt{\lambda} x_0 - \frac{T}{2} \beta_\lambda \right) + \cos(\sqrt{\lambda} T) \left( y_0 + \frac{T}{2} \alpha_\lambda \right), \end{cases}$$

troviamo

$$x_0 = \frac{T}{4\sqrt{\lambda}} \left( \beta_\lambda + \frac{\sin(\sqrt{\lambda} T)}{1 - \cos(\sqrt{\lambda} T)} \alpha_\lambda \right), \quad y_0 = \frac{T}{4} \left( \frac{1 + \cos(\sqrt{\lambda} T)}{\sin(\sqrt{\lambda} T)} \beta_\lambda - \alpha_\lambda \right).$$

Quindi, in questo caso, **esiste un'unica soluzione  $T$ -periodica** di (14). La denotiamo con  $x_{\lambda,e}(t)$ . Tutte **le altre soluzioni** di (14) **sono** del tipo

$$x(t) = x_{\lambda,e}(t) + a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t),$$

e sono pertanto **tutte limitate** su  $\mathbb{R}$ .

Notiamo infine che, se  $\lambda$  tende a  $(\frac{2\pi N}{T})^2$ , per un certo  $N \in \mathbb{N}$ , allora  $\alpha_\lambda \rightarrow a_N$ ,  $\beta_\lambda \rightarrow b_N$  e l'ampiezza di  $x_{\lambda,e}(t)$  tende all'infinito se  $a_N \neq 0$  o  $b_N \neq 0$ .

## 7 Stabilità degli equilibri

Consideriamo un'equazione differenziale autonoma

$$u' = f(u), \tag{16}$$

con  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua. Si dice che  $u_0 \in \Omega$  è un “equilibrio” o “punto stazionario” dell'equazione differenziale (16) se  $f(u_0) = 0$ . In altri termini, la funzione costante  $u(t) = u_0$  è una soluzione dell'equazione differenziale (16).

**Definizione 26** Diremo che un punto di equilibrio  $u_0$  è “stabile” se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  con la seguente proprietà: se per una soluzione  $u$  e per un certo  $\tau \in \mathbb{R}$  si ha che  $\|u(\tau) - u_0\| < \delta$ , allora

$$\|u(t) - u_0\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \geq \tau.$$

Diremo che un equilibrio  $u_0$  è “asintoticamente stabile” se è stabile ed esiste un  $\delta' > 0$  con la seguente proprietà: se per una soluzione  $u$  e per un certo  $\tau \in \mathbb{R}$  si ha che  $\|u(\tau) - u_0\| < \delta'$ , allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u_0.$$

Nel caso in cui  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  sia di classe  $C^1$ , abbiamo il seguente.

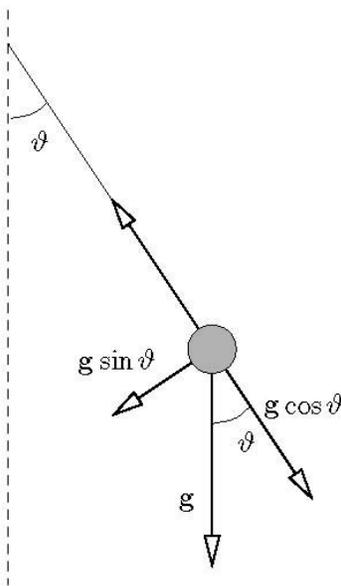
**Teorema 27** *Sia  $u_0$  un equilibrio per l'equazione differenziale (16). Se gli autovalori della matrice jacobiana  $Jf(u_0)$  hanno tutti parte reale negativa, allora  $u_0$  è asintoticamente stabile. Se esiste un autovalore con parte reale positiva, tale equilibrio non è stabile.*

## 7.1 L'equazione del pendolo

Analizziamo la ben nota equazione del pendolo matematico

$$\vartheta'' + c\vartheta' + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0,$$

dove  $g$  è la costante di gravità e  $\ell$  è la lunghezza del pendolo. Qui  $c \geq 0$  è un coefficiente di attrito.



Ponendo  $a = g/\ell$ , passiamo al sistema equivalente nel piano delle fasi

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -cy - a \sin x. \end{cases}$$

Troviamo facilmente gli equilibri: sono i punti del tipo  $(k\pi, 0)$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Siccome la funzione seno è  $2\pi$ -periodica, ci sono due punti di equilibrio geometricamente distinti,  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$ , mentre tutti gli altri si ottengono da questi per  $2\pi$ -periodicità. Studiamo la stabilità di questi due punti di equilibrio. Calcoliamo

$$Jf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -c \end{pmatrix}, \quad Jf(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -c \end{pmatrix}.$$

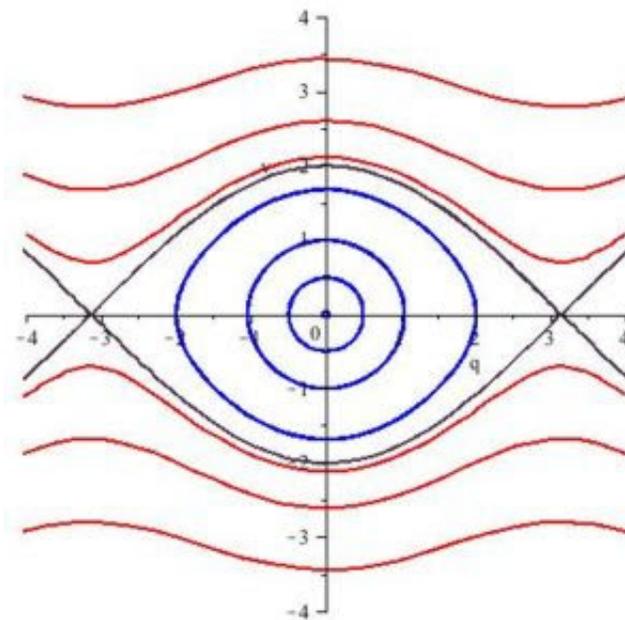
Gli autovalori di  $Jf(0, 0)$  sono le soluzioni di  $\lambda^2 + c\lambda + a = 0$ . Se  $c^2 > 4a$ , sono entrambi reali e negativi:  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 - 4a})$ ; se  $c^2 \in ]0, 4a[$ , sono complessi coniugati, con parte reale negativa:  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm i\sqrt{4a - c^2})$ ; Se  $c = 0$ , sono uguali a  $\pm i\sqrt{a}$ , quindi hanno parte reale nulla.

Gli autovalori di  $Jf(\pi, 0)$  sono le soluzioni di  $\lambda^2 + c\lambda - a = 0$ . Essi sono entrambi reali, uno positivo e uno negativo:  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 + 4a})$ .

Possiamo quindi concludere che l'equilibrio  $(\pi, 0)$  non è stabile, mentre l'equilibrio  $(0, 0)$  è stabile se  $c > 0$ . Il caso  $c = 0$  va trattato a parte: analizziamo le soluzioni  $(x(t), y(t))$ . Le loro orbite si trovano lungo le linee di livello nel piano delle fasi della “funzione hamiltoniana”

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - a \cos x,$$

e sono visualizzate in figura. Siccome la funzione coseno è  $2\pi$ -periodica, le linee di livello della funzione hamiltoniana presentano questo tipo di periodicità nella variabile  $x$ .



Il punto di equilibrio  $(0, 0)$  è un “centro”: tutte le soluzioni vicine sono periodiche. Esso è pertanto stabile. Se indichiamo con  $\tau(\alpha)$  il periodo della

soluzione con punto iniziale  $x(0) = \alpha$ ,  $y(0) = 0$ , si vede che, al variare di  $\alpha$  in  $]0, \pi[$ , il periodo  $\tau(\alpha)$  è strettamente crescente, e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \tau(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \tau(\alpha) = +\infty.$$

Il punto di equilibrio  $(\pi, 0)$  è una “sella”. Esso è il punto di arrivo asintotico di una soluzione  $(x^*(t), y^*(t))$ , detta “eteroclina”, per la quale si ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x^*(t) = -\pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x^*(t) = \pi, \quad \text{e } y^*(t) > 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo anche la soluzione eteroclina simmetrica  $(x_*(t), y_*(t))$ , tale che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_*(t) = \pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_*(t) = -\pi, \quad \text{e } y_*(t) < 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni la cui orbita attraversa l’asse verticale al di sopra del valore  $2\sqrt{a}$  o al di sotto di  $-2\sqrt{a}$  non sono periodiche. Esse corrispondono alla situazione fisica in cui il pendolo continua a ruotare in senso antiorario oppure orario, rispettivamente.

Nel caso in cui il pendolo venga sollecitato con una forza esterna periodica, esso può reagire in diversi modi. Il problema, di carattere prettamente nonlineare, è tuttora in fase di studio. Riportiamo il seguente interessante risultato, ottenuto da J. Mawhin e M. Willem nel 1984.

**Teorema 28** *Sia  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e  $T$ -periodica, tale che*

$$\int_0^T e(t) dt = 0,$$

*allora l’equazione differenziale*

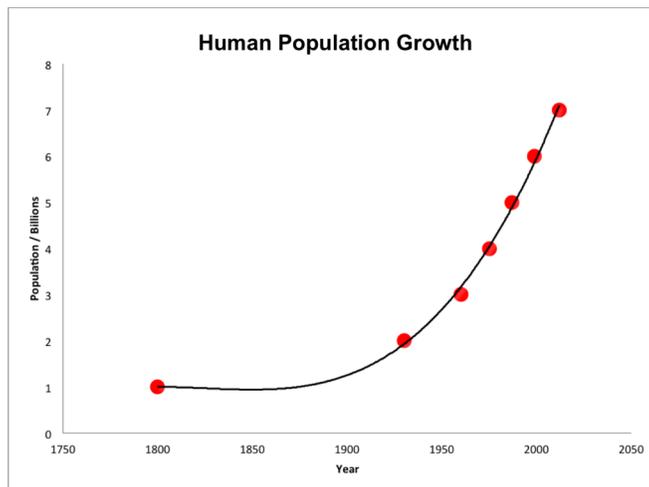
$$\vartheta'' + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = e(t)$$

*ha almento due soluzioni  $T$ -periodiche geometricamente distinte.*

Chiaramente, se l’equazione ha una soluzione  $T$ -periodica  $\vartheta(t)$ , tutte le funzioni che si ottengono da questa aggiungendo un multiplo intero di  $2\pi$  sono ancora soluzioni  $T$ -periodiche. Si dice che due soluzioni sono *geometricamente distinte* se non si possono ottenere l’una dall’altra in questo modo.

## 7.2 Dinamica delle popolazioni

Vogliamo studiare alcuni modelli di distribuzione di specie (animali o vegetali) in un ecosistema. Cominciamo esaminando la crescita della popolazione umana mondiale negli ultimi due secoli.



Una prima interpretazione, per quanto imprecisa, ci fa pensare a una crescita di tipo esponenziale. Uno dei primi modelli di crescita, proposto da Malthus nel 1798, prevede proprio questo tipo di sviluppo. Esso si basa sulla semplice ipotesi che il tasso di crescita sia proporzionale alla numerosità della popolazione.<sup>7</sup>

Indichiamo con  $u(t)$  una misura di densità della numerosità della specie  $u$  al tempo  $t$ . Per poter trattare più facilmente il problema con i metodi dell'analisi matematica, si suppone che  $u(t)$  vari in modo continuo al variare di  $t$ . Questa ipotesi potrebbe sembrare strana, visto che il numero di individui è sempre un intero, ma diventa ragionevole se tale numero è molto elevato e i cambiamenti (nascite, morti o migrazioni) avvengono in modo casuale.

Il modello di Malthus è allora esprimibile con l'equazione differenziale

$$u' = \alpha u,$$

che, com'è noto, ha la soluzione

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t}.$$

Una crescita di questo tipo si può verificare in laboratorio osservando una coltura di batteri. Questi si riproducono duplicandosi, a intervalli di tempo regolari, pertanto il loro numero segue una legge di tipo esponenziale. A un certo punto, però, la loro quantità tende a stabilizzarsi verso un limite, noto come *capacità portante*. Ecco che un modello più preciso deve tener conto di una competizione intraspecifica, dovuta alle risorse limitate. Nel 1838, Verhulst ha proposto l'equazione differenziale

$$u' = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

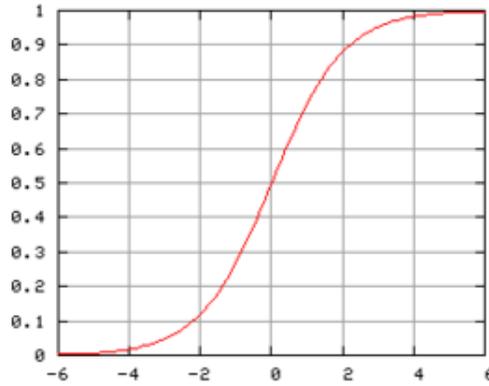
---

<sup>7</sup>Questo modello si applica piuttosto bene a diverse situazioni, sia della biologia che di altre discipline.

nota come *equazione logistica*. Essa si può risolvere esplicitamente:

$$u(t) = \frac{K u_0 e^{\alpha t}}{K + u_0 (e^{\alpha t} - 1)},$$

e un possibile grafico è rappresentato nella sottostante figura.



### 7.3 Interazione tra popolazioni

Passiamo ora a discutere un sistema in cui ci sia interazione tra diverse specie. Si possono presentare diverse situazioni: le specie possono essere l'una preda dell'altra, oppure competere per la sopravvivenza, o ancora cooperare, essere in simbiosi. Analizzeremo questi tre casi separatamente supponendo dapprima di avere a che fare con due sole specie. Anche in questa lezione supponiamo che non ci sia dipendenza dalla posizione  $x$ .

#### 1. Modello preda-predatore

Il primo modello che presentiamo, forse il più semplice, è quello di Lotka–Volterra per un sistema *preda-predatore*. Indichiamo con  $u(t)$  e  $v(t)$  la quantità di prede e di predatori, rispettivamente. Il modello è il seguente:

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta y), \\ y' = y(-\gamma + \delta x). \end{cases}$$

Qui le costanti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sono tutte positive. Notiamo che, in assenza di predatori, le prede seguono l'equazione di Malthus  $x' = \alpha x$ , per cui la loro crescita è di tipo esponenziale. Introducendo i predatori, il fattore di interazione  $-\beta xy$  limita la crescita delle prede. Al contrario, in assenza di prede, i predatori seguono l'equazione  $y' = -\delta y$ , per cui il loro numero decresce esponenzialmente, e sono destinati a estinguersi. Qualora ci siano prede in giro, il fattore  $\delta xy$  ravviva i predatori, che possono così crescere di numero.

Esamineremo ora il sistema preda-predatore, limitandoci allo studio delle soluzioni positive. Si osserva subito che esiste un punto di equilibrio, precisamente

$$\left( \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Uno studio della matrice jacobiana in questo punto ci mostra che gli autovalori hanno parte reale nulla. Per studiarne la stabilità, dobbiamo pertanto usare qualche altro stratagemma.

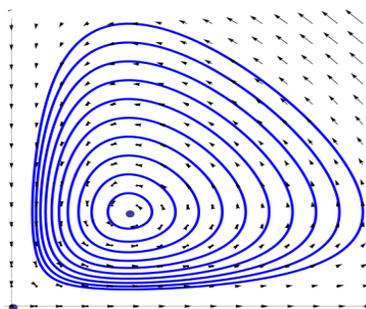
Siccome abbiamo deciso di studiare le soluzioni con  $x(t) > 0$  e  $y(t) > 0$ , definiamo le funzioni  $u_1(t) = \ln x(t)$ ,  $u_2(t) = \ln y(t)$ . Abbiamo che

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y(t) = \alpha - \beta e^{u_2(t)}, \\ u_2'(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = -\gamma + \delta x(t) = -\gamma + \delta e^{u_1(t)}. \end{cases}$$

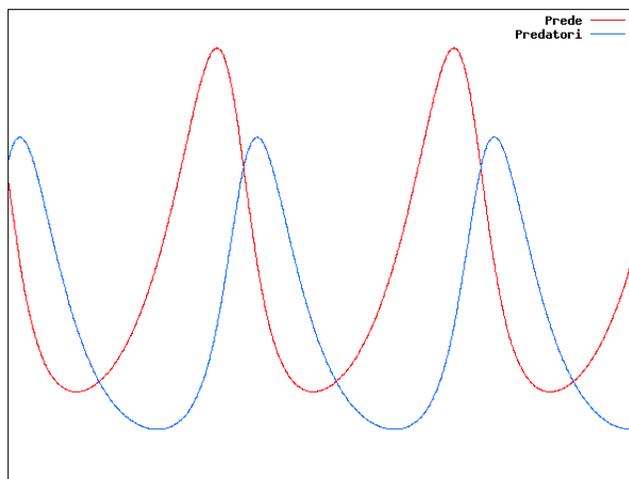
Per questo sistema c'è una funzione hamiltoniana:

$$H(u_1, u_2) = \delta e^{u_1} - \gamma u_1 + \beta e^{u_2} - \alpha u_2.$$

Le soluzioni stanno sulle linee di livello di questa funzione, che sono tutte curve chiuse. Tornando al piano delle fasi iniziale, abbiamo il seguente diagramma.



Le soluzioni sono periodiche e ruotano attorno al punto di equilibrio, in senso antiorario. Vediamo un possibile grafico di  $x(t)$  e di  $y(t)$ .



Questo semplice modello, formulato intorno al 1920, può essere reso più realistico usando le idee introdotte nello studio di una singola popolazione. Ad esempio, la crescita alla Malthus delle prede potrebbe essere sostituita con

una crescita alla Verhulst, o con funzioni di crescita più sofisticate. Potrebbero essere introdotti anche un ritardo, costante o di tipo integrale, e perturbazioni stagionali. Lo stesso vale per i predatori, naturalmente. Questi modelli sono in fase di studio e alimentano molta ricerca attuale. Si possono trovare soluzioni periodiche, o quasi periodiche, studiarne la stabilità al variare dei parametri e delle condizioni iniziali. In alcuni casi si è persino evidenziato il fenomeno del *chaos*, parola usata in situazioni di estrema instabilità, per cui piccolissime variazioni iniziali possono portare a un evolversi delle soluzioni del tutto imprevedibile.

Risulta molto importante, in questo contesto, il problema della *persistenza* di tutte le specie. Le oscillazioni osservate potrebbero infatti portare, nella realtà, all'estinzione delle prede o dei predatori.

## 2. Due specie in competizione

Supponiamo di avere due specie che competono per la sopravvivenza (ad esempio, hanno le stesse risorse di nutrimento, che sono limitate). Possiamo assumere che, in assenza dell'altra specie, ciascuna abbia una crescita di tipo logistico. Un modello plausibile è il seguente:

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 x \left(1 - \frac{x + b_{12}y}{K_1}\right), \\ y' = \alpha_2 y \left(1 - \frac{y + b_{21}x}{K_2}\right). \end{cases}$$

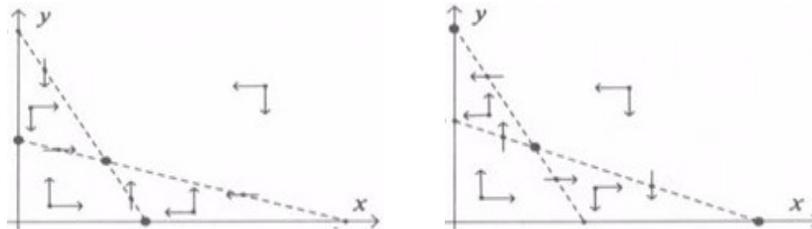
Anche qui le costanti  $\alpha_1, \alpha_2, K_1, K_2, b_{12}, b_{21}$  sono tutte positive. In particolare,  $b_{12}$  misura l'effetto della specie  $v$  sulla crescita di  $u$ , mentre  $b_{21}$  misura l'effetto di  $u$  sulla crescita di  $v$ . A seconda dei parametri

$$a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2},$$

possono verificarsi essenzialmente quattro situazioni diverse.

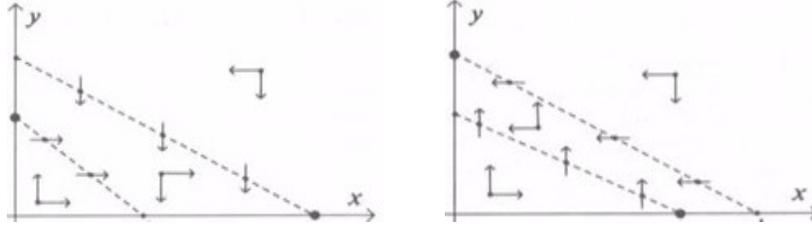
**I caso:**  $a_{12} < 1$  e  $a_{21} < 1$ . Qui c'è un equilibrio stabile nel primo quadrante del piano delle fasi: le due specie possono coesistere.

**II caso:**  $a_{12} > 1$  e  $a_{21} > 1$ . Anche qui c'è un equilibrio, ma è instabile. A seconda delle condizioni iniziali, una delle due specie si estinguerà.



**III caso:**  $a_{12} < 1$  e  $a_{21} > 1$ . Non ci sono equilibri nel primo quadrante, la specie  $v$  si estingue, mentre la  $u$  si stabilizza verso la sua capacità portante  $K_1$ .

**IV caso:**  $a_{12} > 1$  e  $a_{21} < 1$ . Anche qui non ci sono equilibri nel primo quadrante, la specie  $u$  si estingue, mentre la  $v$  si stabilizza verso la sua capacità portante  $K_2$ .



## 8 Risonanza non lineare

Ci proponiamo ora di studiare su un paio di esempi semplici il comportamento di un oscillatore non lineare, nel caso in cui venga sollecitato da una forza periodica nel tempo. Ci interessa in particolare capire se sia ancora possibile definire il concetto di “risonanza”.

### 8.1 L’oscillatore asimmetrico

Per dare una risposta parziale alla nostra domanda, affrontiamo lo studio degli oscillatori asimmetrici. Consideriamo l’equazione differenziale scalare

$$x'' + \mu x^+ - \nu x^- = e(t), \quad (17)$$

dove  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua e  $T$ -periodica e  $\mu > 0$ ,  $\nu > 0$  sono due numeri reali. Qui

$$x^+ = \max\{x, 0\} = \frac{x + |x|}{2}, \quad x^- = \max\{-x, 0\} = \frac{-x + |x|}{2}.$$

Si noti che  $x = x^+ - x^-$ , mentre  $|x| = x^+ + x^-$ . Se  $\mu = \nu$ , abbiamo l’equazione lineare, che è stata studiata nella sezione precedente. Essendo  $\mu$  e  $\nu$  positivi, le soluzioni dell’equazione

$$x'' + \mu x^+ - \nu x^- = 0 \quad (18)$$

sono tutte periodiche di periodo

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}.$$

Una soluzione è data da

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu}t) & \text{se } t \in \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\right], \\ \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sin\left(\sqrt{\nu}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} - t\right)\right) & \text{se } t \in \left[\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}, \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}\right], \end{cases}$$

estesa a tutto  $\mathbb{R}$  in modo da risultare  $\tau$ -periodica. Tutte le altre soluzioni di (18) sono del tipo  $x(t) = \rho\phi(t + \theta)$ , con  $\rho \geq 0$  e  $\theta \in [0, \tau[$ .

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\mu x^+ + \nu x^-, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono curve chiuse che circondano l'origine, il quale pertanto è un centro isocrono. Ognuna di queste curve è ottenuta incollando assieme due semi-ellissi, ossia

$$\{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } y^2 + \mu x^2 = c\} \cup \{(x, y) : x \leq 0 \text{ e } y^2 + \nu x^2 = c\},$$

con  $c \geq 0$ .

Come nel caso lineare abbiamo considerato gli autovalori dell'operatore differenziale, così qui possiamo considerare l'insieme  $\Sigma$  delle coppie  $(\mu, \nu)$  per cui l'equazione (18) ha soluzioni  $T$ -periodiche non nulle. Si vede allora che  $\Sigma$  contiene, oltre ai due assi cartesiani  $\{\mu = 0\}$  e  $\{\nu = 0\}$ , una successione  $(C_N)_{N \geq 1}$  di curve:

$$C_N = \left\{ (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \mu > 0, \nu > 0, N \left( \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} \right) = T \right\}.$$

L'insieme  $\Sigma$  è spesso chiamato “spettro di Fučík”.

A differenza dell'equazione lineare, non è pensabile di scrivere le soluzioni  $T$ -periodiche di (17) in modo esplicito. Possiamo comunque enunciare alcuni risultati sulla dinamica delle soluzioni dell'equazione (17). Ecco il risultato di Fučík, pubblicato nel 1976.

**Teorema 29** *Se  $(\mu, \nu) \notin \Sigma$ , allora l'equazione (17) ha almeno una soluzione  $T$ -periodica.*

Si noti che la soluzione non è necessariamente unica. Ad esempio, prendendo  $e(t) = 1$ , costante, abbiamo un punto di equilibrio  $x = \frac{1}{\mu}$ . In un intorno di questo punto, le soluzioni risolvono l'equazione lineare

$$x'' + \mu x = 1,$$

e sono pertanto periodiche di periodo  $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ . D'altra parte, le soluzioni di grande ampiezza hanno un periodo che si avvicina a  $\tau$ . Supponiamo che sia  $\nu < \mu$ . Se  $n$  è un intero positivo tale che

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} < \frac{T}{n} < \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}},$$

troviamo in corrispondenza una soluzione  $T$ -periodica, di periodo minimo  $\frac{T}{n}$ . Di tali  $n$  ce ne possono essere molti.

Supponiamo ora che sia  $(\mu, \nu) \in \Sigma$ , per cui esiste un  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} = \frac{T}{N}.$$

Nel 1976, Dancer ha introdotto la funzione

$$\Phi(\theta) = \int_0^T e(t)\phi(t + \theta) dt,$$

e ha dimostrato il seguente risultato.

**Teorema 30** *Se*

$$\Phi(\theta) \neq 0, \quad \text{per ogni } \theta \in \mathbb{R},$$

*allora l'equazione (17) ha almeno una soluzione  $T$ -periodica. Inoltre, tutte le soluzioni sono limitate.*

Diversa è la situazione se la funzione  $\Phi$  cambia segno. Faremo l'ipotesi che essa abbia solo zeri semplici, ossia che, se  $\Phi(\theta) = 0$ , allora  $\Phi'(\theta) \neq 0$ . Osserviamo che, in questo caso, essendo  $\tau$ -periodica, la funzione  $\Phi$  avrà nell'intervallo  $[0, \tau[$  un numero pari di zeri. Nei lavori di Alonso–Ortega e Fabry–Fonda del 1998, è stato dimostrato il seguente

**Teorema 31** *Se gli zeri della funzione  $\Phi$  nell'intervallo  $[0, \tau[$  sono tutti semplici ed il loro numero è di almeno quattro, allora l'equazione (17) ha almeno una soluzione  $T$ -periodica. D'altra parte, in questo caso, tutte le soluzioni di grande ampiezza sono illimitate.*

Ci sono effettivamente degli esempi in cui la funzione  $\Phi$  ha esattamente due zeri semplici nell'intervallo  $[0, \tau[$  e l'equazione (17) non ha soluzioni  $T$ -periodiche.

## 8.2 Ponti sospesi

Un ponte è una struttura complessa, le cui componenti sono soggette a varie forme di sollecitazioni. I più lunghi al mondo sono tutti di tipo *ponte sospeso*. Attualmente il ponte di Akashi, in Giappone, detiene il record di lunghezza della campata centrale, con i suoi 1991 metri.

Scorrendo la lista dei ponti sospesi più lunghi, vedi ad esempio

[https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_longest\\_suspension\\_bridge\\_spans](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_longest_suspension_bridge_spans)

si trovano al sedicesimo e al diciassettesimo posto il Ponte di Verrazzano a New York (1298 metri) e il Golden Gate Bridge a San Francisco (1280 metri). È notevole il fatto che quest'ultimo sia stato costruito nel 1937, più di ottanta anni fa, ed è tuttora in uso. Tre anni dopo fu costruito un altro ponte, che però non ebbe altrettanta fortuna.



Inaugurato il 1° luglio 1940, il Ponte di Tacoma Narrows divenne subito famoso per la sua caratteristica di oscillare verticalmente, in presenza di vento trasversale, con oscillazioni di uno-due metri di ampiezza. Questo comportamento inusuale era dovuto al fatto che il ponte aveva una sezione molto stretta e di piccolo spessore, per cui risultava molto flessibile rispetto ai ponti costruiti fino ad allora.

Il mattino del 7 novembre 1940 il ponte stava oscillando, come al solito, quando improvvisamente le oscillazioni verticali si trasformarono in oscillazioni trasversali. Queste aumentarono in ampiezza fino a superare l'angolo di  $45^\circ$  e, alle ore 11:10, la struttura cedette precipitando nel mare sottostante. Il breve documentario su

[www.youtube.com/watch?v=KVc7oBKzq9U](http://www.youtube.com/watch?v=KVc7oBKzq9U)

mostra la sequenza delle oscillazioni del ponte prima del crollo, e ne attribuisce la causa al fenomeno della *risonanza*.

Questo fenomeno è ben noto per i sistemi *lineari*. Esso entra in gioco quando la frequenza di un termine forzante periodico risulta uguale alla frequenza delle oscillazioni libere della struttura. Si è allora ipotizzato che la forza periodica agente sulla struttura fosse provocata dai *vortici di von Karman*, che si alternano in modo periodico al passare del fluido lungo la struttura. Un rapido calcolo permette però di vedere che la frequenza delle oscillazioni del ponte di Tacoma non era strettamente correlata con la velocità del vento, e quindi con la frequenza dei vortici da esso generati.

D'altra parte, un modello lineare presuppone che la struttura presenti *piccole oscillazioni*, mentre le oscillazioni del ponte di Tacoma, quel 7 novembre del 1940, erano evidentemente di grande ampiezza. Inoltre, la struttura stessa

di un ponte sospeso è asimmetrica: le funi che lo sostengono agiscono da una sola parte del ponte, per cui una trazione verso il basso incontra una forza di richiamo elastica nel verso contrario, mentre un sollevamento del ponte verso l'alto potrebbe far allentare le funi, per cui non ci sarebbe alcuna forza di richiamo.

Viene allora spontanea una domanda: esiste una *risonanza nonlineare*? Come la si può definire?

Analizziamo un possibile modello di ponte sospeso, per quanto molto semplificato. Si tratta di un oscillatore in verticale, soggetto alla forza di gravità, sostenuto da una molla, con questa caratteristica: se lo si solleva al di sopra di un'altezza  $h$ , la molla si allenta e non esercita più alcuna forza. Misurando la posizione  $u(t)$  verso il basso, avremo l'equazione differenziale

$$x'' + F(x) = e(t),$$

dove

$$F(x) = \begin{cases} \mu(x+h) - g & \text{se } x \geq -h, \\ -g & \text{se } x \leq -h. \end{cases}$$

Osserviamo che, per ragioni di continuità, deve essere  $\mu h = g$ , per cui l'equazione si può scrivere brevemente come

$$x'' + \mu [(x+h)^+ - h] = e(t). \quad (19)$$

Iniziamo a studiare le oscillazioni libere, quando cioè il termine forzante è nullo. Prendendo una soluzione con condizioni iniziali  $x(0) = \alpha > 0$  e  $x'(0) = 0$ , si può vedere che essa è sempre periodica. Abbiamo due casi, a seconda che sia  $\alpha$  minore o maggiore di  $h$ . Infatti, se  $\alpha \leq h$ , la soluzione rimane nella zona lineare, e il suo periodo è

$$\tau(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Se invece  $\alpha \geq h$ , la soluzione esce dalla zona lineare, e si può calcolare che

$$\tau(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \left[ \arccos\left(-\frac{h}{\alpha}\right) + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{h}\right)^2 - 1} \right].$$

Si nota che il periodo  $\tau(\alpha)$  è una funzione crescente di  $\alpha$ , strettamente crescente se  $\alpha \geq h$ , e

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \tau(\alpha) = +\infty.$$

Come si può allora ancora parlare di *risonanza* in questo caso?

Per quanto riguarda le soluzioni periodiche per l'equazione differenziale (19), avendo osservato che i periodi delle oscillazioni libere tendono a  $+\infty$  al crescere delle ampiezze, si può ipotizzare l'esistenza di *soluzioni subarmoniche*, ossia soluzioni  $kT$ -periodiche, dove  $k$  è un intero positivo sufficientemente grande. In effetti, vale il seguente risultato, provato da Ding e Zanolin nel 1992.

**Teorema 32** *Esiste un numero naturale  $\bar{k}$  tale che, per ogni  $k \geq \bar{k}$ , l'equazione differenziale (19) ha almeno due soluzioni subarmoniche di periodo minimo  $kT$ .*

### 8.3 Moto in campo gravitazionale

Affrontiamo il problema del moto di un corpo in un campo gravitazionale Newtoniano, dove la forza è data dalla nota formula

$$F = G \frac{mM}{d^2}.$$

In altri termini, se usiamo la notazione  $x = (x_1, x_2)$ , l'equazione del moto è<sup>8</sup>

$$\ddot{x}(t) = -\frac{GM}{|x|^3} x.$$

Per trovare la traiettoria del moto, passiamo a coordinate polari:

$$x(t) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t)).$$

Abbiamo allora

$$\dot{x}(t) = (\dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t), \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)),$$

e quindi

$$\ddot{x} = (\ddot{\rho} \cos \theta - 2\dot{\rho}\dot{\theta} \sin \theta - \rho\ddot{\theta} \sin \theta - \rho\dot{\theta}^2 \cos \theta, \ddot{\rho} \sin \theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \cos \theta + \rho\ddot{\theta} \cos \theta - \rho\dot{\theta}^2 \sin \theta).$$

L'equazione differenziale diventa pertanto

$$\begin{cases} \ddot{\rho} \cos \theta - 2\dot{\rho}\dot{\theta} \sin \theta - \rho\ddot{\theta} \sin \theta - \rho\dot{\theta}^2 \cos \theta = -\frac{GM}{\rho^2} \cos \theta, \\ \ddot{\rho} \sin \theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \cos \theta + \rho\ddot{\theta} \cos \theta - \rho\dot{\theta}^2 \sin \theta = -\frac{GM}{\rho^2} \sin \theta. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per  $\cos \theta$ , la seconda per  $\sin \theta$  e sommando, otteniamo

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{\rho^2}.$$

D'altra parte, moltiplicando la prima equazione per  $\sin \theta$ , la seconda per  $\cos \theta$  e sottraendo, si ha che

$$-2\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\ddot{\theta} = 0.$$

A questo punto, notiamo che

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} = \rho(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = 0,$$

il che significa che la quantità  $\mu := \rho^2(t)\dot{\theta}(t)$  è costante nel tempo  $t$ . Essa si chiama *momento angolare scalare*. Supporremo ad esempio  $\mu > 0$ , e pertanto

---

<sup>8</sup>Useremo qui la notazione di Newton per indicare le derivate rispetto a  $t$ : scriveremo ad esempio  $\dot{x}(t)$  invece di  $x'(t)$ , e  $\ddot{x}(t)$  invece di  $x''(t)$ .

avremo che  $\dot{\theta}(t) > 0$ , per ogni  $t$ . Sostituendo nella prima equazione, abbiamo quindi

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \frac{\mu^2}{\rho^3} + \frac{GM}{\rho^2} = 0, \\ \dot{\theta} = \frac{\mu}{\rho^2}. \end{cases}$$

Vogliamo trovare una funzione  $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  tale che

$$\rho(t) = \mathcal{F}(\theta(t)), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Supponendo che una tale funzione esista, introduciamo anche la funzione ausiliaria  $\mathcal{G}(\theta) = 1/\mathcal{F}(\theta)$  e abbiamo

$$\dot{\rho}(t) = \mathcal{F}'(\theta(t))\dot{\theta}(t) = \mathcal{F}'(\theta(t))\frac{\mu}{\rho(t)^2} = \mathcal{F}'(\theta(t))\frac{\mu}{\mathcal{F}(\theta(t))^2} = -\mu\mathcal{G}'(\theta(t)),$$

e quindi, ricordando che  $1/\rho(t) = \mathcal{G}(\theta(t))$ ,

$$\ddot{\rho}(t) = -\mu\mathcal{G}''(\theta(t))\dot{\theta}(t) = -\mu\mathcal{G}''(\theta(t))\frac{\mu}{\rho(t)^2} = -\mu^2\mathcal{G}''(\theta(t))\mathcal{G}(\theta(t))^2.$$

Sostituendo nell'equazione, otteniamo che

$$-\mu^2\mathcal{G}''(\theta(t))\mathcal{G}(\theta(t))^2 - \mu^2\mathcal{G}(\theta(t))^3 + GM\mathcal{G}(\theta(t))^2 = 0,$$

da cui

$$\mathcal{G}''(\theta(t)) + \mathcal{G}(\theta(t)) = \frac{GM}{\mu^2}.$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico con un termine forzante costante, di facile soluzione: si ha

$$\mathcal{G}(\theta(t)) = \frac{GM}{\mu^2} + \gamma \cos(\theta(t) - \theta_0),$$

dove  $\gamma$  e  $\theta_0$  sono costanti da determinarsi a partire dalle condizioni iniziali. Vista la simmetria del problema, fissiamo per semplicità  $\theta_0 = \pi$ . Abbiamo così l'equazione

$$\rho(t) = \frac{1}{\frac{GM}{\mu^2} + \gamma \cos \theta(t)}.$$

Ponendo

$$\ell = \frac{\mu^2}{GM}, \quad \varepsilon = \frac{\mu^2\gamma}{GM},$$

otteniamo

$$\rho(t) = \frac{\ell}{1 - \varepsilon \cos \theta(t)},$$

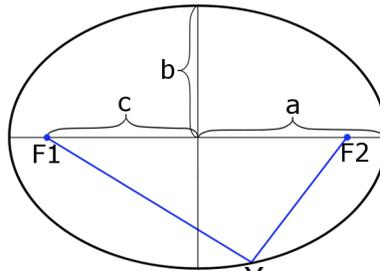
che è l'equazione di una conica in coordinate polari.

[
]
 Ricaviamo l'equazione di un'ellisse in coordinate polari, supponendo che uno dei due fuochi sia posizionato nell'origine, e l'asse maggiore sia orizzontale. Com'è noto, se indichiamo con

- $a$  la lunghezza del semiasse maggiore,
- $b$  la lunghezza del semiasse minore,
- $c$  la semi-distanza tra i due fuochi,

l'equazione cartesiana di questa ellisse è

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

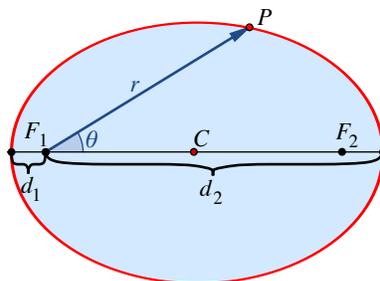


Ricordiamo inoltre che si ha

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Scrivendo un punto  $P$  dell'ellisse in coordinate polari

$$P = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$



abbiamo che

$$\rho + \sqrt{(\rho \cos \theta - 2c)^2 + (\rho \sin \theta)^2} = 2a,$$

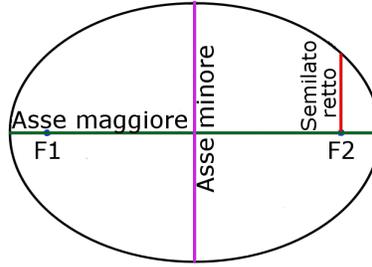
da cui, facendo i calcoli,

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}.$$

Se denotiamo con

$$l = \frac{b^2}{a} \text{ il semilato retto,}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ l'eccentricità,}$$



si ha l'equazione

$$\rho = \frac{\ell}{1 - \varepsilon \cos \theta}.$$

In seguito ci sarà utile conoscere la formula dell'area dell'ellisse:

$$A = 2 \int_{-a}^a \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} dx = 2b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos^2 u du = \pi ab.$$

[ (Abbiamo usato la sostituzione  $x = a \sin u$ ). ]

La *Prima legge di Keplero* afferma che un oggetto attratto da una massa fissa si deve muovere lungo un'ellisse con uno dei fuochi posizionato nel punto attrattore. In realtà, questo succede se l'eccentricità  $\varepsilon$  è minore di 1. In particolare, se  $\varepsilon = 0$ , si ha un'orbita circolare.

Se  $\varepsilon = 1$  l'orbita è una parabola, mentre se  $\varepsilon > 1$  si ha un'iperbole. Questo tipo di orbite non erano state predette da Keplero.

La *Seconda legge di Keplero* descrive la velocità di movimento di  $x(t)$  lungo l'ellisse. Indichiamo con  $A(t)$  l'area spazzata dal vettore  $x(\tau)$  al variare di  $\tau$  da 0 a  $t$ . Scrivendo  $x(\tau) = (\rho(\tau) \cos \theta(\tau), \rho(\tau) \sin \theta(\tau))$ , abbiamo che  $\rho(\tau) = \mathcal{F}(\theta(\tau))$ , per cui

$$A(t) = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \left( \int_0^{\mathcal{F}(\vartheta)} r dr \right) d\vartheta = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{2} \mathcal{F}(\vartheta)^2 d\vartheta.$$

Ricordando che  $\mu = \rho(\tau)^2 \dot{\theta}(\tau)$  è costante, e supponendo  $\mu > 0$ , abbiamo che  $\tau \mapsto \theta(\tau)$  è strettamente crescente, per cui possiamo effettuare un cambio di variabile nell'integrale:

$$A(t) = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{2} \mathcal{F}(\vartheta)^2 d\vartheta = \int_0^t \frac{1}{2} \mathcal{F}(\theta(\tau))^2 \dot{\theta}(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{2} \rho(\tau)^2 \dot{\theta}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \mu t.$$

Ecco quanto afferma la seconda legge: l'area  $A(t)$  cresce linearmente in  $t$ , per cui la sua derivata  $A'(t)$  è costante.

La *Terza legge di Keplero* fornisce una relazione tra il periodo di rotazione e il semiasse maggiore dell'orbita ellittica. Sia  $T$  il tempo impiegato dal nostro oggetto per compiere una rotazione attorno alla massa fissa. Abbiamo quindi (vedi la formula per l'area dell'ellisse) che

$$\frac{1}{2} \mu T = \pi ab.$$

Da ciò, essendo  $b^2 = al$  e  $\mu^2 = GMl$ , troviamo la formula

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

È interessante notare che il periodo dipende solo dalla lunghezza del semiasse maggiore, ed è indipendente dalla lunghezza del semiasse minore.

Le tre leggi sono state trovate da Johannes Kepler studiando il moto dei pianeti attorno al sole. Le prime due furono enunciate nel 1609, la terza nel 1619. Isaac Newton ne ha poi dato un'interpretazione generale nei suoi *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, pubblicati nel 1687. Una spiegazione originale delle leggi di Keplero si può trovare qui:

[www.youtube.com/watch?v=ge06Znj7hyk](http://www.youtube.com/watch?v=ge06Znj7hyk)