

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

## 1 Introduzione

Consideriamo un insieme  $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$  con  $n \geq 1$ . Supponiamo  $\tilde{\Omega}$  aperto e non vuoto. Consideriamo una funzione  $F : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e scriviamo la seguente equazione differenziale ordinaria in forma **implicita** di ordine  $n$ :

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Diremo che una funzione  $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una **soluzione** dell'EDO implicita (1) se

- la funzione  $x$  è differenziabile  $n$  volte sul suo dominio  $I$ ,
- le derivate  $x^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue per ogni indice  $k : 1, \dots, n$ ,
- vale  $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in \tilde{\Omega}$  per ogni  $t \in I$ ,
- vale l'equazione  $F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$  per ogni  $t \in I$ .

Nota: da qui in avanti, salvo diversa segnalazione, con  $I$  intendiamo un generico intervallo reale.

Supponiamo di poter isolare la variabile  $x^{(n)}$  nella funzione  $F$ , allora possiamo ottenere una equazione differenziale ordinaria in forma **esplicita** di ordine  $n$

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}). \quad (2)$$

dove la funzione  $g : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua definita in un aperto  $\Omega$  non vuoto. In questo caso diremo che la funzione  $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una **soluzione** dell'EDO esplicita (2) se

- la funzione  $x$  è differenziabile  $n$  volte sul suo dominio  $I$ ,
- le derivate  $x^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue per ogni indice  $k : 1, \dots, n$ ,
- vale  $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in \Omega$  per ogni  $t \in I$ ,
- vale l'equazione  $x^{(n)}(t) = g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$  per ogni  $t \in I$ .

Da qui in avanti tratteremo la teoria per EDO esplicite, ma naturalmente tutto può essere riscritto per EDO implicite, ma per esse sono necessarie maggiori accortezze che preferiamo qui evitare.

**Definizione 1.1** (Problema di Cauchy). *Dato  $(t_0, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1}) \in \Omega$ . Diremo che la funzione  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  risolve il Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \\ x(t_0) = \bar{x}_0, \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = \bar{x}_{n-1}. \end{cases} \quad (3)$$

se sono soddisfatte le seguenti condizioni

- $t_0 \in I$ ,
- $x$  risolve l'EDO (2),
- sono soddisfatte le  $n$  condizioni iniziali:

$$x(t_0) = \bar{x}_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = \bar{x}_{n-1}.$$

Il vettore  $(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1})$  rappresenta le condizioni iniziali al tempo  $t_0$ .

**Nota 1.** Dal secondo principio della dinamica  $F = ma$  abbiamo che, dato un sistema di forze agenti su un corpo, sono in grado di determinare una legge che descriva la sua accelerazione ( $a = x''$ ) in funzione della sua posizione ( $x$ ) e della sua velocità ( $v = x'$ ). Il problema è quindi: dato un istante di tempo iniziale  $t_0$  e le condizioni iniziali  $x(t_0)$  (posizione iniziale) e  $v(t_0) = x'(t_0)$  (velocità iniziale), determinare la traiettoria  $x(t)$  di una particella soggetta alle suddette forze. Dobbiamo quindi risolvere un'equazione differenziale. Nel caso della forza elastica e dell'attrito viscoso trovo:  $x'' = \frac{1}{m}(-kx - \mu x')$  che è una EDO in forma esplicita che usualmente viene scritta in forma implicita come  $x'' + cx' + \omega^2 x = 0$  ovvero l'oscillatore armonico con attrito.

Introduciamo ora la nozione di sistema di EDO.

Consideriamo un insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aperto e non vuoto ( $n \geq 1$ ) e una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua che possiamo scrivere in componenti come  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Possiamo definire il seguente sistema di  $n$  equazioni differenziali ordinarie del primo ordine scritto in forma esplicita:

$$x' = f(t, x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (4)$$

Diremo che la funzione  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è soluzione del sistema di EDO (4) se

- $x$  è derivabile con derivata continua su  $I$ , ovvero  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ,
- $(t, x(t)) \in \Omega$  per ogni  $t \in I$ ,
- vale  $x'(t) = f(t, x(t))$  per ogni  $t \in I$ .

Ad un sistema di EDO possiamo associare i relativi problemi di Cauchy.

**Definizione 1.2** (Problema di Cauchy). Dato un elemento  $(t_0, \bar{x}) \in \Omega$ . Diremo che la funzione  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  risolve il **Problema di Cauchy**

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = \bar{x} \end{cases} \quad (5)$$

se sono soddisfatte le seguenti condizioni

- $t_0 \in I$ ,
- $x$  risolve il sistema di EDO (4),
- sono soddisfatte le  $n$  condizioni iniziali:

$$x_1(t_0) = \bar{x}_1, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = \bar{x}_n.$$

Osserviamo ora come il problema di Cauchy rappresentato in (3) possa essere riscritto nella forma di sistema (5). Per evitare confusione scriviamo provvisoriamente (5) con la variabile  $y$ , ovvero come

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = \bar{y} \end{cases}$$

con  $y = (y_1, \dots, y_n)$  e  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ .

Possiamo definire la funzione a valori vettoriali  $y$  mediante la funzione scalare  $x$  e le sue derivate. Ovvero possiamo porre  $y = (y_1, \dots, y_n) = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$  (la coordinata  $k$ -esima di  $y$  è la derivata  $k - 1$ -esima di  $x$ ). A questo punto definiamo la funzione  $f$  come

$$f(t, y) = f(t, y_1, \dots, y_n) = (y_2, y_3, \dots, y_n, g(t, y_1, \dots, y_n))$$

In questo modo otteniamo il sistema di EDO:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = g(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (6)$$

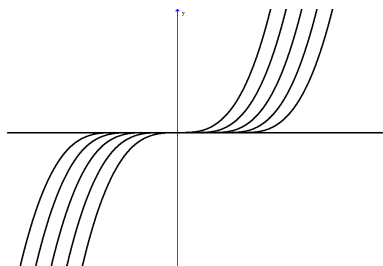


Figura 1: Il pennello di Peano.

da cui possiamo calcolare che vale

$$y_1^{(n)}(t) = y_2^{(n-1)}(t) = \dots = y_{n-1}''(t) = y_n'(t) = g(t, y_1(t), y_1'(t), \dots, y_1^{(n-1)}(t))$$

da cui evinciamo che  $y_1$  (e quindi  $x$ ) risolve l'EDO (2). Le condizioni iniziali del problema di Cauchy (3) diventano nel problema di Cauchy (5) le seguenti:

$$y(t_0) = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{n-1}) = (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)).$$

**Nota 2.** L'EDO del secondo ordine  $x'' + cx' + \omega^2 x = 0$  può essere riscritta nella forma di sistema di EDO del primo ordine come

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -cy - \omega^2 x. \end{cases}$$

Ricordando la Nota 1, spesso in fisica si introduce una variabile aggiuntiva (spesso la velocità o la quantità di moto) per trasformare una EDO del secondo ordine in un sistema di EDO del primo ordine ( $\rightarrow$  equazioni di Lagrange, equazioni di Hamilton) non necessariamente con la procedura descritta sopra.

**Definizione 1.3** (Terminologia). In un sistema di EDO (4), se la funzione  $f$  non dipende esplicitamente dal tempo possiamo semplicemente scrivere:  $x' = f(x)$ . In tal caso si parla di sistema di EDO autonomo.

**Osservazione 1.4.** Dato un sistema di EDO autonomo  $x' = f(x)$ , se  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una sua soluzione allora per ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$  la funzione  $\tilde{x}(t) = x(t - t_0)$  è ancora una soluzione (essa ha però dominio  $\tilde{I} = \{t \in \mathbb{R} \mid t - t_0 \in I\}$ ). Per questo motivo, in presenza di un sistema di EDO autonomo non è restrittivo scegliere l'istante iniziale  $t_0 = 0$ .

**Nota 3.** In merito all'osservazione precedente, ricordiamo che in meccanica classica, in assenza di forze variabili nel tempo, l'istante in cui un oggetto viene lanciato, con velocità e posizione prefissate, non influisce sulla sua traiettoria.

## 2 Teoremi di esistenza e unicità

Consideriamo in questa sezione il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (7)$$

dove  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $(t_0, x_0) \in \Omega$  dove  $\Omega$  è un aperto.

**Teorema 2.1** (Teorema di Peano). Se  $f$  è continua allora esiste una soluzione del problema di Cauchy (7).

(Dimostrazione omessa)

Vediamo subito un esempio di problema di Cauchy con  $f$  continua ma che dà luogo a molteplici soluzioni per lo stesso dato iniziale.

**Esempio 2.2.** *Il problema di Cauchy scalare*

$$\begin{cases} x' = x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ammette come soluzioni sia  $x(t) = 0$  che  $x(t) = t^3/27$  e ciò si verifica facilmente, tuttavia possiamo trovare anche le seguenti infinite soluzioni per ogni scelta di  $c, d \in \mathbb{R}^+$ :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(t+d)^3}{27} & t < -d \\ 0 & -d \leq t \leq c \\ \frac{(t-c)^3}{27} & t > c \end{cases}$$

Questo fenomeno prende il nome di pennello di Peano. Il motivo si intuisce dalla Figura 1.

Quale proprietà manca alla funzione  $f(x) = x^{2/3}$  tale da causare questo comportamento? A prima vista notiamo che  $f$  non è derivabile in zero. In realtà chiedere la derivabilità di  $f$  risulta una richiesta eccessivamente prudente.

**Definizione 2.3** (Funzioni Lipschitziane). *Una funzione  $f : \hat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice Lipschitziana se esiste  $L > 0$  tale che*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

per ogni  $x, y \in \hat{\Omega}$ . La costante  $L$  è detta costante di Lipschitz.

Un esempio di funzione Lipschitziana  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è  $f(x) = |x|$ , che non è derivabile in zero. Tuttavia una funzione semplice come  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$  non è Lipschitziana.

**Definizione 2.4** (Funzioni localmente Lipschitziane). *Una funzione  $f : \hat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice localmente Lipschitziana se per ogni  $x_0 \in \hat{\Omega}$  esiste un raggio  $\rho$  e una costante  $L > 0$  tale che*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

per ogni  $x_1, x_2 \in B_\rho(x_0)$ .

Osserviamo che  $g(x) = x^2$  è localmente Lipschitziana (dimostrarlo per esercizio usando il teorema di Lagrange).

Questa definizione non può essere soddisfacente quando trattiamo problemi di Cauchy non autonomi in cui abbiamo anche una dipendenza dalla variabile  $t$ . Introduciamo quindi un'ulteriore definizione

**Definizione 2.5.** *Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\Omega$  aperto. La funzione  $f$  si dice localmente Lipschitziana nella seconda variabile se per ogni  $(t_0, x_0) \in \Omega$  esiste un intorno  $U \subseteq \Omega$  di questo punto e una costante  $L > 0$  tale che*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

per ogni coppia  $(t, x_1), (t, x_2) \in U$ .

Si noti che nella disuguaglianza la coordinata  $t$  è la stessa per i due punti. Inoltre ogni definizione, nell'ordine, implica la validità della successiva.

**Proposizione 2.6.** *Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\Omega$  aperto. Supponiamo che esistano in  $\Omega$  le derivate parziali rispetto alla seconda variabile  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e che le derivate parziali  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  siano continue per  $k = 1, \dots, n$ . Allora la funzione è localmente Lipschitziana nella seconda variabile.*

*Dimostrazione.* Ragioneremo dapprima sulle componenti  $f_k$  della funzione  $f$ . Fissiamo un generico istante  $t$  per cui valga  $\Omega_t := \{x \mid (t, x) \in \Omega\} \neq \emptyset$ , ovvero tale che esista almeno un punto di  $\Omega$  avente il valore  $t$  come prima coordinata (mostrare per esercizio che  $\Omega_t$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ). Dalle ipotesi segue che la funzione  $f_k(t, \cdot) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e differenziabile con continuità nel suo dominio. Quindi, in ogni punto del dominio  $\Omega_t$ , possiamo calcolare il suo gradiente, che denotiamo con  $\nabla_x f_k(t, \cdot)$ . Dal teorema del valor medio di Lagrange emerge che, per ogni  $x, y \in \Omega_t$ ,

$$f_k(t, x) - f_k(t, y) = \frac{\partial f_k}{\partial \nu}(t, \xi) \|x - y\|$$

dove  $\xi$  appartiene al segmento di estremi  $x$  e  $y$  e  $\frac{\partial f_k}{\partial \nu}(t, \cdot) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$  è la derivata direzionale di  $f_k(t, \cdot)$  con direzione individuata dal vettore  $x - y$ . Ricordando che  $\frac{\partial f_k}{\partial \nu}(t, \cdot) = \langle \nabla_x f_k(t, \cdot), \nu \rangle$ , possiamo ottenere la seguente maggiorazione:

$$|f_k(t, x) - f_k(t, y)| \leq \|\nabla_x f_k(t, \xi)\| \|x - y\|.$$

A questo punto siamo pronti per dimostrare la tesi. Fissiamo un generico  $(t_0, x_0) \in \Omega$ . Essendo  $\Omega$  aperto, possiamo trovare  $\delta > 0$  e  $\rho > 0$  tale che  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_\rho(x_0) \subset \Omega$ . Dalle ipotesi, il gradiente (sulle sole variabili  $x$ )  $\nabla_x f_k(\cdot, \cdot) : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_\rho(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione continua su un compatto, quindi per il Teorema di Weierstrass esiste  $M_k > 0$  tale che

$$\|\nabla_x f_k(t, x)\| \leq M_k, \quad \text{per ogni } (t, x) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_\rho(x_0).$$

cosicché, ricordando la stima ottenuta precedentemente,

$$|f_k(t, x) - f_k(t, y)| \leq M_k \|x - y\|$$

per ogni  $(t, x), (t, y) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_\rho(x_0)$ . Il ragionamento vale per ogni componente  $k$ . Ponendo  $M = \max\{M_1, \dots, M_n\}$  troviamo quindi

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\| &= \sqrt{\sum_{k=1}^n |f_k(t, x) - f_k(t, y)|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n M_k^2 \|x - y\|^2} \\ &\leq \sqrt{nM^2} \|x - y\| \\ &= M\sqrt{n} \|x - y\| \end{aligned}$$

da cui la tesi: abbiamo infatti dimostrato che per ogni elemento  $(t_0, x_0) \in \Omega$  esiste un intorno  $U = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_\rho(x_0)$  e una costante  $\square$

**Definizione 2.7** (Condizioni di Lipschitz). *In seguito, trattando Problemi di Cauchy, diremo che la funzione  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\Omega$  aperto, verifica le condizioni di Lipschitz se è continua e in più è localmente Lipschitziana nella seconda variabile.*

Ritorniamo ora al problema di Cauchy (7). Consideriamo l'insieme  $X \subseteq C^0(I, \mathbb{R}^n)$  delle funzioni  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue tali che  $(t, x(t)) \in \Omega$  per ogni  $t \in I$ . Definiamo la funzione:  $T : X \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$  tale che

$$T[x](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

allora la funzione  $T[x] : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  risulta derivabile con derivata  $f(t, x(t))$  per ogni  $t \in I$  e soddisfa  $T[x](t_0) = x_0$ . Ne consegue che, se trovassi una funzione  $x \in X$  tale che  $T[x] = x$  allora  $x$  risolverebbe il problema di Cauchy (7).

Questa osservazione mi permette di osservare che la ricerca delle soluzioni di un problema di Cauchy equivale alla ricerca di un punto fisso per la funzione  $T$ .

Questa idea sta alla base della dimostrazione del seguente **teorema di esistenza e unicità**.

**Teorema 2.8** (Cauchy-Lipschitz). *Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che soddisfa le condizioni di Lipschitz. Dato  $(t_0, x_0) \in \Omega$  esiste  $\varepsilon > 0$  ed esiste una funzione  $x : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $x$  risolve il problema di Cauchy (7).*

*Inoltre, se esiste un'altra soluzione  $\tilde{x} : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema di Cauchy allora vale  $x = \tilde{x}$  sull'intersezione dei loro domini.*

(Dimostrazione omessa - per ora)

Cosa succederebbe se io tentassi di risolvere il problema di Cauchy avente per condizione iniziale  $(t_0 + \varepsilon, x(t_0 + \varepsilon))$ , ovvero l'istante e la posizione finale della soluzione suggerita dal teorema precedente? In teoria dovrei poter prolungare ulteriormente questa soluzione per tempi più grandi.

**Teorema 2.9** (Unicità globale). *Nelle ipotesi del teorema precedente, esiste un'unica soluzione massimale  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema di Cauchy (7), ovvero ogni altra soluzione  $\tilde{x} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dello stesso problema di Cauchy è tale che  $\tilde{I} \subseteq I$  e  $\tilde{x}(t) = x(t)$  per ogni  $t \in \tilde{I}$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo l'insieme  $I$  come l'unione di tutti i domini delle possibili soluzioni del problema di Cauchy:

$$I = \bigcup \left\{ \tilde{I} \mid \exists \tilde{x} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ soluzione di PC.} \right\}.$$

Ovviamente  $t_0 \in I$  e definiamo la soluzione massimale  $x$  come segue: per ogni  $t \in I$  deve esistere necessariamente un intervallo  $\tilde{I}$  contenente  $t$  a cui è associata una soluzione  $\tilde{x}$  del problema di Cauchy. Allora poniamo  $x(t) = \tilde{x}(t)$ . Con questa definizione si vede facilmente che per ogni  $t \in I$  vale  $x'(t) = f(t, x(t))$  e che vale  $x(t_0) = x_0$ . Quindi  $x$  è una soluzione del problema di Cauchy e per costruzione ha la proprietà richiesta.  $\square$

**Proposizione 2.10.** *L'intervallo  $I$  su cui è definita la soluzione massimale del problema di Cauchy (7) è aperto.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sia la soluzione massimale del problema di Cauchy (7). Consideriamo  $a = \inf I$  e  $b = \sup I$ . Se  $a \in \mathbb{R}$  dobbiamo mostrare che  $a \notin I$ , similmente se  $b \in \mathbb{R}$  dobbiamo mostrare che  $b \notin I$ . Analizziamo qui solo la situazione per  $a = \inf I$ . Scrivere per esercizio l'altro caso in modo analogo. Supponiamo che  $a \in I$ , allora possiamo calcolare il valore  $\bar{x} := x(a)$  e trovare che  $(a, \bar{x}) \in \Omega$ . A questo punto esisterà un  $\varepsilon > 0$  e una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(a) = \bar{x}, \end{cases}$$

che chiameremo  $\hat{x}$ , definita su  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ . Notiamo che essa coincide con la soluzione massimale  $x$  su  $[a, a + \varepsilon]$ . Potremmo definire la funzione

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \hat{x}(t) & x \in [a - \varepsilon, a) \\ x(t) & x \in I \end{cases}$$

trovando una nuova soluzione del problema di Cauchy (7) definita su un intervallo più grande contraddicendo l'ipotesi di massimalità. L'esser giunti a questa contraddizione ci porta ad aver mostrato che  $a \notin I$ .  $\square$

**Teorema 2.11.** *Sia  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  soluzione massimale del problema di Cauchy (7) con  $I = (\alpha, \beta)$ . Se  $\beta \in \mathbb{R}$  ed esiste  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$  (e quindi  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} (t, x(t)) = (\beta, \bar{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ) allora  $(\beta, \bar{x}) \in \partial\Omega$ .*

*Analogamente, abbiamo che se  $\alpha \in \mathbb{R}$  ed esiste  $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} x(t) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$  (e quindi  $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} (t, x(t)) = (\alpha, \bar{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ) allora  $(\alpha, \bar{x}) \in \partial\Omega$ .*

La dimostrazione è omissa.

Forniamo ora un esempio di problema di Cauchy avente soluzioni che non sono definite su tutto l'intervallo  $I = \mathbb{R}$ .

**Esempio 2.12.** *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = a^{-1} \quad a > 0 \end{cases}$$

ammette soluzione  $x(t) = -(t - a)^{-1}$  che è definita su  $I = (-\infty, a)$  e vale  $\lim_{t \rightarrow a^-} x(t) = +\infty$ .

**Teorema 2.13** (Uscita dal compatto). *Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\Omega$  aperto ed  $f$  che soddisfa le condizioni di Lipschitz. Sia  $\tilde{x} : \tilde{I} = (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  soluzione massimale del problema di Cauchy (7).*

*Per ogni insieme compatto  $K \subset \Omega$ , esistono  $t_1, t_2$ , con  $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$ , tali che  $(t, \tilde{x}(t)) \notin K$  per ogni  $t \in (\alpha, t_1) \cup (t_2, \beta)$ .*

Dimostrazione omissa.

**Lemma 2.14** (Lemma di Gronwall). *Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo con interno non vuoto e una funzione  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua, con  $u(t) \geq 0$  per ogni  $t \in I$ . Supponiamo esista  $t_0 \in I$  e due costanti  $A, B \geq 0$  tali che*

$$0 \leq u(t) \leq A + B \cdot \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right|, \quad \forall t \in I.$$

Allora vale

$$0 \leq u(t) \leq A \cdot e^{B|t-t_0|}, \quad \forall t \in I.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo  $I = (\alpha, \beta)$ . Consideriamo il caso  $t > t_0$ . Per ogni scelta di  $\varepsilon > 0$ , definiamo la funzione  $V_\varepsilon : [t_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$V_\varepsilon(t) = A + B \cdot \int_{t_0}^t u(s) ds + \varepsilon > u(t) \geq 0.$$

Abbiamo che  $V'_\varepsilon(t) = Bu(t) < BV_\varepsilon(t)$  per ogni  $t \in [t_0, \beta)$ . Quindi

$$\frac{d}{dt}(\log V_\varepsilon(t)) = \frac{V'_\varepsilon(t)}{V_\varepsilon(t)} < B, \quad \forall t \in [t_0, \beta),$$

da cui

$$\begin{aligned} \log(V_\varepsilon(t)) - \log(A + \varepsilon) &= \log(V_\varepsilon(t)) - \log(V_\varepsilon(t_0)) \leq B(t - t_0) \\ \Rightarrow \log(V_\varepsilon(t)) &\leq \log(A + \varepsilon) + B(t - t_0) \\ \Rightarrow u(t) &\leq V_\varepsilon(t) \leq (A + \varepsilon)e^{B(t-t_0)}, \end{aligned}$$

per ogni  $t \in [t_0, \beta)$ . Tale stima vale per ogni scelta di  $\varepsilon > 0$ , quindi ne consegue che

$$u(t) \leq Ae^{B(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, \beta).$$

Vediamo ora il caso  $t < t_0$  velocemente. In questo caso definiamo  $\widehat{V}_\varepsilon : (\alpha, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$\widehat{V}_\varepsilon(t) = A - B \cdot \int_{t_0}^t u(s) ds + \varepsilon = A + B \cdot \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right| + \varepsilon > u(t) \geq 0,$$

che invece soddisfa  $\widehat{V}'_\varepsilon(t) = -Bu(t) > -B\widehat{V}_\varepsilon(t)$  e quindi  $\frac{d}{dt}(\log \widehat{V}_\varepsilon(t)) > -B$  per ogni  $t \in (\alpha, t_0]$ . La stima ora diventa:

$$\begin{aligned} \log(A + \varepsilon) - \log(\widehat{V}_\varepsilon(t)) &= \log(\widehat{V}_\varepsilon(t_0)) - \log(\widehat{V}_\varepsilon(t)) \geq -B(t_0 - t) = -B|t - t_0| \\ \Rightarrow \log(\widehat{V}_\varepsilon(t)) &\leq \log(A + \varepsilon) + B|t - t_0| \\ \Rightarrow u(t) &\leq \widehat{V}_\varepsilon(t) \leq (A + \varepsilon)e^{B|t-t_0|}, \end{aligned}$$

da cui si arriva alla conclusione. □

**Teorema 2.15** (Esistenza globale). *Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo aperto e  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che soddisfa le condizioni di Lipschitz. Supponiamo che per ogni compatto  $J \subseteq I$  esistano due costanti  $C_1, C_2 \geq 0$  tali che*

$$\|f(t, x)\| \leq C_1 + C_2\|x\| \quad \forall t \in J, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

*allora la soluzione massimale di ogni problema di Cauchy è definita su tutto l'intervallo  $I$ .*

**Osservazione 2.16.** *Se  $f$  non dipende dal tempo, la (8) diventa*

$$\|f(x)\| \leq C_1 + C_2\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (9)$$

**Nota 4.** *Osserviamo che in fisica (classica) le forze dipendono da spazio e velocità al massimo linearmente rispettando l'ipotesi (8). Quindi le traiettorie saranno definite per ogni istante temporale e le particelle non spariscono improvvisamente. Un discorso a parte va riservato per la legge di gravitazione universale: in essa c'è la singolarità in zero e quindi non è definita su tutto  $\mathbb{R}^3$  e non possiamo trovarci nelle ipotesi del teorema precedente. Tuttavia, poiché asintoticamente la forza va annullandosi mentre la distanza dall'origine va a infinito, osserviamo che tale forza rispetta la (8) lontano dallo zero. Ricordando che di per sé pianeti e stelle hanno raggio positivo, se evitiamo di considerare il caso di particelle che impattano con la fonte di attrazione, l'esistenza globale delle traiettorie vale ancora.*

*Dimostrazione del teorema di esistenza globale.* Consideriamo gli intervalli dell'enunciato in questa forma:  $I = (a, b) \supseteq \tilde{I} = (\alpha, \beta)$ , dove  $\tilde{I}$  è l'intervallo su cui è definita la soluzione massimale. Supponiamo per assurdo

che  $\beta < b$  (e in particolare  $\beta \in \mathbb{R}$ ) e prendiamo un  $\delta > 0$  tale che  $\beta - \delta > \alpha$ . Consideriamo l'insieme compatto  $[\beta - \delta, \beta] \subseteq I$ . La soluzione  $\tilde{x}$  è definita come

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(\beta - \delta) + \int_{\beta - \delta}^t f(s, \tilde{x}(s)) ds, \quad \forall t \in [\beta - \delta, \beta].$$

Segue che

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq \|\tilde{x}(\beta - \delta)\| + \int_{\beta - \delta}^t \|f(s, \tilde{x}(s))\| ds \\ &\leq \|\tilde{x}(\beta - \delta)\| + \int_{\beta - \delta}^t C_1 + C_2 \|\tilde{x}(s)\| ds. \end{aligned}$$

Ponendo  $A = \|\tilde{x}(\beta - \delta)\| + C_1\delta$ ,  $B = C_2$  e infine  $u(s) = \|\tilde{x}(s)\|$  notiamo che vale

$$u(t) \leq A + B \int_{\beta - \delta}^t u(s) ds,$$

che ci permette di applicare il Lemma 2.14. Otteniamo

$$u(t) = \|\tilde{x}(t)\| \leq (\|\tilde{x}(\beta - \delta)\| + C_1\delta) e^{C_2[t - (\beta - \delta)]} \leq A \cdot e^{B\delta}.$$

Posto  $R := A \cdot e^{B\delta}$ , troviamo quindi che  $\|\tilde{x}(t)\| \leq R$  per ogni  $t \in [\beta - \delta, \beta]$  e quindi

$$(t, \tilde{x}(t)) \in K := [\beta - \delta, \beta] \times \overline{B}_R(0)$$

che è un compatto. Allora la soluzione massimale contraddice il teorema di uscita dal compatto. Di conseguenza non possiamo avere  $\beta < b$ . Ipotizzare che valga  $\alpha > a$  porta similmente ad un assurdo (completare per esercizio questa parte della dimostrazione). Segue la tesi.  $\square$

### 3 Risoluzione di alcuni tipi di EDO

#### 3.1 Equazioni lineari del primo ordine

Consideriamo un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  aperto,  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ , entrambe funzioni continue, e l'equazione differenziale

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \quad (10)$$

di cui cerchiamo una soluzione  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Osserviamo innanzitutto che per essa vale il teorema di esistenza globale (Teorema 2.15). Consideriamo  $A$  una primitiva di  $a$  e  $B$  una primitiva della funzione  $h(t) = e^{-A(t)}b(t)$  definite sull'intervallo  $I$ . Definiamo, fissata una costante  $c \in \mathbb{R}$ , la funzione

$$x(t) = e^{A(t)} [B(t) + c] = ce^{A(t)} + B(t)e^{A(t)} \quad \forall t \in I. \quad (11)$$

Queste sono le uniche soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine (10).

**Proposizione 3.1.** *La funzione  $x$  definita in (11) risolve (10) per ogni scelta di  $c \in \mathbb{R}$ . Inoltre, se  $x$  è soluzione dell'equazione (10) allora essa necessariamente è definita come in (11) per un certo  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo una soluzione di (10). Moltiplichiamo la (10) per  $e^{-A(t)}$  e otteniamo

$$\begin{aligned} x'(t)e^{-A(t)} &= a(t)x(t)e^{-A(t)} + b(t)e^{-A(t)}, \\ \iff e^{-A(t)} [x'(t) - a(t)x(t)] &= b(t)e^{-A(t)}, \\ \iff \frac{d}{dt} [e^{-A(t)}x(t)] &= b(t)e^{-A(t)}. \end{aligned}$$

Quindi le primitive differiscono per una costante  $c \in \mathbb{R}$ :

$$e^{-A(t)}x(t) = B(t) + c$$

da cui troviamo  $x$  come in (11). Ripercorrendo al contrario la dimostrazione, si dimostra la prima parte dell'enunciato.  $\square$



**Definizione 3.2.** Si dice integrale generale di una EDO l'insieme di tutte le sue soluzioni.

**Esempio 3.3.** Trovare l'integrale generale di

$$x' = f(t, x) = \frac{x}{t} + 3t^3. \quad (12)$$

Osserviamo innanzitutto che  $f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Distingueremo i casi  $t < 0$  e  $t > 0$ . Per  $t < 0$  abbiamo  $A(t) = \log(-t)$ , quindi  $e^{A(t)} = -t$  e  $e^{-A(t)}b(t) = -3t^2$  da cui  $B(t) = -t^3$ . Troviamo quindi la soluzione:

$$\tilde{x}(t) = e^{A(t)}[B(t) + c] = -t(-t^3 + c) = t^4 - ct.$$

Per  $t > 0$  abbiamo  $A(t) = \log(t)$ , quindi  $e^{A(t)} = t$  e  $e^{-A(t)}b(t) = 3t^2$  da cui  $B(t) = t^3$ . Troviamo quindi la soluzione:

$$\hat{x}(t) = e^{A(t)}[B(t) + c] = t(t^3 + d) = t^4 + dt.$$

Se poniamo  $c = -d$  non notiamo differenza tra le due espressioni. Notiamo che in entrambi i casi le funzioni hanno dominio  $\mathbb{R}$  tuttavia non è corretto affermare che esse sono soluzioni di (12) su  $\mathbb{R}$ , infatti la funzione  $f$  che definisce l'equazione differenziale (12) non è definita in zero e quindi una sua soluzione non può scavalcare questo valore. In particolare, dato un problema di Cauchy con condizione iniziale  $x(t_0) = x_0$  ( $t_0 \neq 0!$ ), la soluzione del problema di Cauchy  $x(t) = t^4 - ct$  sarà definita con dominio  $(-\infty, 0)$  se  $t_0 < 0$ . Viceversa, se  $t_0 > 0$  sarà definita con dominio  $(0, +\infty)$ .

**Esercizio 3.4.** Trova il valore della costante  $c \in \mathbb{R}$  dell'esempio precedente a variare di  $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

## 3.2 Equazione di Bernoulli

Consideriamo un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  aperto,  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ , entrambe funzioni continue, e l'equazione differenziale

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)[x(t)]^\alpha, \quad (13)$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \neq 0, 1$ , di cui cerco una soluzione  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3.5.** Perché non si considerano i casi  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$ ?

**Osservazione 3.6.** • Se  $\alpha > 0$  l'equazione è ben definita per  $x \geq 0$  e la funzione  $x(t) \equiv 0$  è soluzione dell'equazione;

- Se  $\alpha < 0$  l'equazione è definita per  $x > 0$ ;
- Se  $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}^+$  dove  $q$  è dispari (supponiamo che  $p/q$  sia ridotta ai minimi termini) allora l'equazione è ben definita per  $x \in \mathbb{R}$ ;
- Se  $\alpha = -p/q \in \mathbb{Q}^-$  dove  $q$  è dispari (supponiamo che  $p/q$  sia ridotta ai minimi termini) allora l'equazione è ben definita per  $x \neq 0$ .
- Se  $\alpha \in (0, 1)$ , ad esempio  $\alpha = 1/2$ , non valgono le condizioni di Lipschitz. Quindi non è garantita l'unicità delle soluzioni;
- se  $\alpha > 0$  e non vale  $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}^+$  con  $q$  dispari, l'insieme su cui è definita l'equazione differenziale non è aperto, quindi sarebbe più opportuno scrivere l'equazione differenziale (13) come

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)|x(t)|^\alpha, \quad (14)$$

ottenendo un'EDO definita per  $x \in \mathbb{R}$ .

Per risolvere l'equazione di Bernoulli (13) si segue la seguente procedura. Consideriamo una soluzione  $x$  tale che  $x \neq 0$  in un certo insieme, allora possiamo dividere l'equazione per  $x^\alpha$  e sostituire  $z = x^{1-\alpha}$ .

$$\begin{aligned} (13) \quad &\Rightarrow [x(t)]^{-\alpha}x'(t) = a(t)[x(t)]^{1-\alpha} + b(t) \\ &\Rightarrow z'(t) = (1-\alpha)[x(t)]^{-\alpha}x'(t) = (1-\alpha)a(t)z(t) + (1-\alpha)b(t). \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto che  $z$  risolve una equazione differenziale ordinaria lineare del primo ordine di cui conosciamo tutte le soluzioni. Quindi le soluzioni di (13) si ottengono risolvendo l'EDO lineare in  $z$  e usando la sostituzione  $z = x^{1-\alpha}$ . Per esercizio, ripetere il ragionamento per l'equazione differenziale (14).

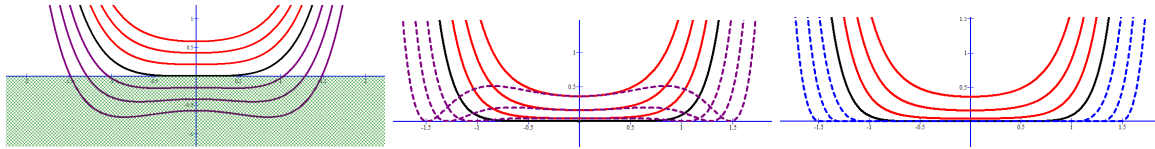


Figura 2: Esempio 3.7. Sopra: le soluzioni  $z$  della EDO (16). In mezzo: un'errata interpretazione delle soluzioni dell'equazione di Bernoulli. Sotto: la corretta interpretazione.

**Esempio 3.7.** Cerchiamo le soluzioni di

$$x' = f(t, x) = 2t\sqrt{x}(t^2 + \sqrt{x}).$$

Osserviamo che  $f$  è definita per  $x \geq 0$ . Inoltre possiamo riscrivere l'EDO in forma di equazione di Bernoulli come:

$$x' = 2tx + 2t^3\sqrt{x} \quad (15)$$

che ha la soluzione costante  $x \equiv 0$ . Supponiamo  $x > 0$  in un certo intervallo e poniamo  $z = \sqrt{x} > 0$ , allora

$$z' = \frac{1}{2} \frac{x'}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \frac{2tx + 2t^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = tz + t^3 \quad (16)$$

che è una EDO del primo ordine con  $a(t) = t$  e  $b(t) = t^3$ . Troviamo  $A(t) = t^2/2$  e  $B(t) = -e^{-t^2/2}(t^2 + 2)$  (calcoli per esercizio). Quindi troviamo le soluzioni

$$z(t) = e^{t^2/2} \left[ -e^{-t^2/2}(t^2 + 2) + c \right] = -(t^2 + 2) + ce^{t^2/2}$$

Sostituendo  $z = \sqrt{x}$  troviamo

$$x(t) = \left[ -(t^2 + 2) + ce^{t^2/2} \right]^2 \quad \text{finché vale } x(t) > 0!.$$

Infatti, l'equazione (15) non avrebbe particolari restrizioni e le sue soluzioni si comportano come nella prima illustrazione in Figura 2. Tuttavia ad essa siamo giunti ipotizzando  $x > 0$  (e quindi  $z > 0$ ) in un certo intervallo. Ne consegue che dobbiamo focalizzare la nostra attenzione solo sulla parte di dominio delle soluzioni  $z$  in cui queste assumono valori positivi. Possiamo distinguere soluzioni sempre positive (in rosso) e soluzioni che cambiano segno (in viola). Inoltre c'è una soluzione, in nero, che si annulla in un solo punto. Quando sostituiamo  $x = z^2$  dobbiamo stare attenti alla parte in cui  $z$  è negativa ed escluderla. Se ce ne dimentichiamo, elevando al quadrato otteniamo le soluzioni  $x$  in viola tratteggiate nella seconda illustrazione di Figura 2 che si sovrappongono alle corrette soluzioni  $x$  in rosso. Notiamo che per  $x > 0$  la (15) soddisfa le condizioni di Lipschitz e quindi vale il teorema di unicità. Entriamo quindi in contraddizione: se tutto fosse corretto così come disegnato nella seconda illustrazione, in prossimità del punto d'incontro tra una linea viola tratteggiata e una linea rossa avremmo una condizione iniziale per un problema di Cauchy avente due distinte soluzioni. Nell'ultima illustrazione di Figura 2 osserviamo le soluzioni  $x$  corrette. Le soluzioni in blu tratteggiate, positive per valori di  $t$  negativi, "atterrano" sull'asse  $x$  dove non sono soddisfatte le condizioni di Lipschitz e quindi possiamo non avere unicità. Da qui in avanti restano costanti (con valore zero) oppure "decidono" di staccarsi dall'asse in un certo istante  $t > 0$  percorrendo una delle linee tratteggiate blu sulla destra. Nulla vieta che "decidano" di restare sempre costanti per ogni valore di  $t$  positivo.

A maggiore conferma di quanto sopra, sostituendo in (15) un valore  $x > 0$  e un valore  $t < 0$  troviamo  $x' < 0$ , quindi finché  $t < 0$  una soluzione positiva non può essere crescente. Con ragionamento analogo non può essere decrescente per valori di  $t > 0$  (sostituire  $t > 0$  e  $x > 0$  stavolta). Questo invece accade nella seconda illustrazione di Figura 2 che quindi è sbagliata.

**Esempio 3.8.** Consideriamo l'equazione di Bernoulli

$$x'(t) = 2t[x + x^{-3}], \quad (17)$$

per la quale dobbiamo chiedere  $x \neq 0$ . Ponendo  $z = x^4$  troviamo

$$z' = 4x^3x' = 4(2tx^4 + 2t) \Rightarrow z' = 8tz + 8t \quad (18)$$

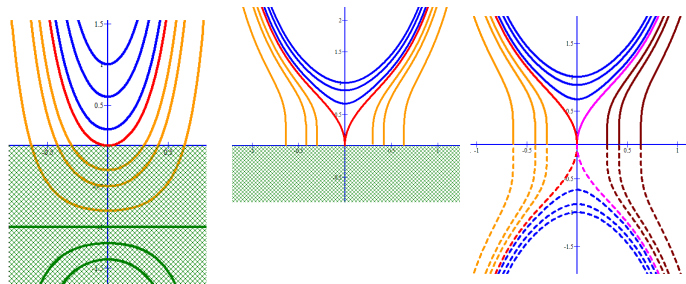


Figura 3: Esempio 3.8. A sinistra: le soluzioni  $z$  della e.d.o. (18). In mezzo: le soluzioni positive dell'equazione di Bernoulli. A destra: tutte le possibili soluzioni.

che è una EDO lineare del primo ordine con  $a(t) = b(t) = 8t$ . Troviamo  $A(t) = 4t^2$  e  $B(t) = -e^{-4t^2}$ , cosicchè le sue soluzioni sono

$$z(t) = e^{4t^2} \left[ -e^{-4t^2} + c \right] = ce^{4t^2} - 1$$

Ricordando di aver posto  $x \neq 0$ , essendo  $z = x^4 > 0$  troviamo

$$x(t) = \pm \sqrt[4]{ce^{4t^2} - 1}. \quad (19)$$

La soluzione è definita fintantochè l'argomento della radice resta positivo. Notiamo che nei punti in cui l'argomento si annulla la funzione non è derivabile. Se all'equazione differenziale (17) è associata una condizione iniziale del tipo  $x(t_0) = x_0$  (con  $x_0 \neq 0!$ ) allora sceglieremo in (19) il segno  $+$  se  $x_0 > 0$  e il segno  $-$  se  $x_0 < 0$ , mentre il valore di  $c$  si otterrà risolvendo l'equazione  $ce^{4t_0^2} - 1 = x_0^4$ .

In Figura 3 sono illustrate le soluzioni dell'EDO lineare (18) di cui considereremo solo gli istanti con  $z > 0$ . In generale l'equazione (18) ammette soluzioni positive (in blu), una soluzione non negativa (in rosso), soluzioni che cambiano segno (in giallo) e soluzioni negative (in verde). Queste ultime non saranno nemmeno prese in considerazione quando torneremo a considerare la variabile  $x$ . Per quanto riguarda le soluzioni in giallo e quella in rosso, considereremo solo gli istanti in cui  $z(t) > 0$ . Nella figura in mezzo notiamo le soluzioni di (17) con dato iniziale  $x(t_0) = x_0 > 0$ . Esse sono definite su semirette (la curva in rosso va separata in due soluzioni distinte) e presentano punti di non derivabilità sulla frontiera del dominio. Nell'illustrazione a destra, inseriamo tratteggiate le soluzioni con dato iniziale  $x(t_0) = x_0 < 0$ . Osserviamo che per  $c > 1$  la soluzione (in blu) è definita su tutto l'asse reale.

**Esercizio 3.9.** Scrivere (e specificarne chiaramente l'intervallo massimale di esistenza) le soluzioni di (17) aventi dati iniziali

$$\begin{aligned} x(0) = 1; x(0) = -1; \\ x(-1) = 1; x(1) = 1; x(-1) = -1; x(1) = -1; \\ x\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\log 5}\right) = 2; x\left(\frac{1}{2}\sqrt{\log 5}\right) = 2. \end{aligned}$$

### 3.3 Equazioni a variabili separabili

Consideriamo ora  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalli aperti, due funzioni continue  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  e l'EDO a variabili separabili

$$x' = f(t, x) = g(t)h(x). \quad (20)$$

Se la condizione iniziale del problema di Cauchy associato all'equazione (20) è  $x(t_0) = x_0$  dove  $h(x_0) = 0$  allora la soluzione è la costante  $x \equiv x_0$ . Supponiamo quindi di considerare una soluzione  $x$  di (20) tale che  $h(x(t)) \neq 0$  in un certo intervallo di tempo  $\mathcal{I} \subseteq I$ , in particolare  $h(x(t)) > 0$  oppure  $h(x(t)) < 0$  per ogni  $t \in \mathcal{I}$ . Possiamo allora dividere per questo valore l'equazione e ottenere

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t), \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Sia  $G$  primitiva di  $g$  e  $H$  una primitiva di  $1/h$  allora otteniamo

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \frac{d}{dt}G(t), \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Quindi le due funzioni differiscono per una costante e vale  $H(x(t)) = G(t) + c$  per una certa costante  $c \in \mathbb{R}$ . A questo punto, essendo  $H' = 1/h > 0$  oppure  $H' = 1/h < 0$  su  $\mathcal{I}$  allora  $H$  è invertibile in  $\mathcal{I}$  e troviamo

$$x(t) = H^{-1}(G(t) + c).$$

**Esempio 3.10.** Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = e^{x+t} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Notiamo subito che l'equazione è a variabili separabili, infatti la possiamo riscrivere come  $x' = e^t \cdot e^x$  e quindi otteniamo

$$\frac{x'(t)}{e^{x(t)}} = e^t \Rightarrow x'(t)e^{-x(t)} = e^t$$

da cui, cercando le primitive di  $e^{-x}$  e  $e^t$ , troviamo

$$-e^{-x(t)} = e^t + c \Rightarrow x(t) = -\log(-c - e^t)$$

che sarà definita per  $t < \log(-c)$ . Imponendo la condizione  $x(0) = 0$  troviamo  $c = -2$  e quindi

$$x(t) = -\log(2 - e^t).$$

**Esempio 3.11.** Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2t \frac{\cos x}{\sin x} \\ x(0) = \pi/3. \end{cases}$$

Osserviamo che l'equazione differenziale non è definita per  $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  mentre ha soluzioni costanti  $\pi/2 + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Essendo  $\tan \pi/3 \neq 0$ , il nostro problema non ha una soluzione costante. Calcoliamo le primitive

$$x'(t) \tan x(t) = 2t \Rightarrow -\log |\cos x(t)| = t^2 + c,$$

da cui troviamo

$$\begin{aligned} \log |\cos x(t)| = \tilde{c} - t^2 &\Rightarrow |\cos x(t)| = e^{\tilde{c} - t^2} = \tilde{A}e^{-t^2} \quad (\tilde{A} > 0) \\ &\Rightarrow \cos x(t) = Ae^{-t^2} \quad (A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ &\Rightarrow x(t) = \arccos(Ae^{-t^2}) \end{aligned}$$

Osserviamo che in questi passaggi sono nascosti molti dettagli: la costante  $c$  può essere sostituita opportunamente di passaggio in passaggio per semplificare la notazione

$$\tilde{c} = -c, \tilde{A} = e^{\tilde{c}}, A = \pm \tilde{A};$$

quando togliamo il valore assoluto dobbiamo considerare il segno dell'argomento, questo comporta il passaggio da  $\tilde{A} > 0$  a  $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Quando invertiamo il coseno dobbiamo stare attenti a dove si trova la variabile  $x$ . Il passaggio che introduce l'arcocoseno è valido purché valga  $x(t) \in [0, \pi]$ . La condizione iniziale  $x(0) = \pi/3$  ci permette di poter affermare che in un intorno di 0 questa condizione sarà soddisfatta. Bisogna sempre prestare attenzione a questo tipo di passaggi! Inserendo la condizione iniziale, troviamo la soluzione del problema di Cauchy:

$$x(t) = \arccos\left(\frac{1}{2}e^{-t^2}\right).$$

### 3.4 Equazioni omogenee

Supponiamo di avere un'EDO  $x' = f(t, x)$  tale che si possa esprimere la funzione  $f$  nel seguente modo

$$f(t, x) = g(x/t)$$

dove  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua. Notiamo che, se questa visualizzazione è possibile, la funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  risulta avere dominio

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0, x/t \in I\} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0, x = mt, m \in I\}$$

che è aperto in  $\mathbb{R}^2$  se  $I$  è aperto (dimostrarlo per esercizio). L'EDO

$$x' = g\left(\frac{x}{t}\right)$$

è detta *equazione differenziale omogenea* (del primo ordine).

Per risolvere questo tipo di equazione sostituiamo  $z(t) = \frac{x(t)}{t}$ .

$$\begin{aligned}x(t) = tz(t) &\Rightarrow g(z(t)) = x'(t) = z'(t) + tz'(t) \\ &\Rightarrow z'(t) = \frac{g(z(t)) - z(t)}{t}.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un'EDO a variabili separabili:

$$z' = \frac{1}{t}(g(z) - z).$$

**Esempio 3.12.** Consideriamo l'equazione differenziale

$$x' = \frac{t^3 + x^3}{tx^2}. \quad (21)$$

Notiamo che dobbiamo porre  $t, x \neq 0$ . Possiamo riscriverla nella forma

$$x' = \frac{t^2}{x^2} + \frac{x}{t} = g\left(\frac{x}{t}\right), \quad g(s) = s^{-2} + s.$$

Quindi effettuando la sostituzione suggerita troviamo

$$z' = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{t} \quad !z \neq 0!$$

Calcoliamo quindi le soluzioni

$$z^2 z' = t^{-1} \Rightarrow z^3/3 = \log|t| + c \Rightarrow z(t) = \sqrt[3]{3 \log|t| + d}$$

Ritornando alla variabile  $x$  troviamo le soluzioni alla nostra EDO iniziale

$$x(t) = t \sqrt[3]{3 \log|t| + d}. \quad (22)$$

Ricordiamo che abbiamo posto  $t \neq 0$  e  $x \neq 0$  quindi la soluzione sarà definita per  $t < 0$  o per  $t > 0$  su un intervallo in cui assume lo stesso segno. Guardiamo la Figura 4. Osserviamo che nella (22) vale  $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0$  e che ogni altra intersezione del grafico di  $x$  con l'asse  $y$  individua un punto di non derivabilità della funzione  $x$  definita in (22). In questi punti la funzione  $x$  non è derivabile. In questi punti perdiamo la proprietà di  $x$  come soluzione di (21). Ad esempio, la linea blu è costituita da 4 soluzioni distinte dell'equazione differenziale: una negativa definita su  $I_1 = (-\infty, -1)$ , la seconda positiva su  $I_2 = (-1, 0)$ , la terza negativa su  $I_3 = (0, 1)$ , l'ultima positiva su  $I_4 = (1, +\infty)$ . Tutte queste soluzioni sono associate a differenti problemi di Cauchy che portano comunque alla scelta della costante  $d = 0$  in (22).

Concludiamo questa sezione ricordando che è possibile introdurre le EDO omogenee di ordine superiore al primo. Per esse esiste un metodo risolutivo, ma non ne trattiamo in questa sede.

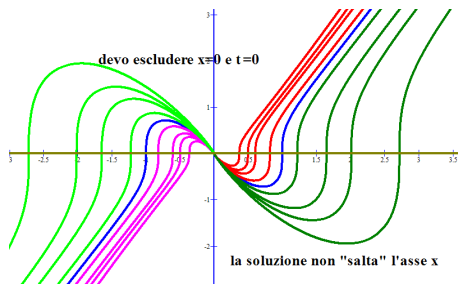


Figura 4: Esempio 3.12. Le soluzioni dell'equazione (21).

## 4 Equazioni differenziali ordinarie lineari

Le equazioni differenziali ordinarie lineari di ordine  $n$  sono EDO del tipo

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t), \quad (\text{L})$$

dove le funzioni  $a_j : I \rightarrow \mathbb{R}$  e la funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $I$  aperto, sono continue. Riscrivendo l'equazione nella forma (2) troviamo che sono rispettate le ipotesi di Lipschitz e le ipotesi di crescita lineare (8), quindi ogni problema di Cauchy associato all'EDO (L) ammette un'unica soluzione e questa è definita su tutto l'intervallo  $I$ . Nel caso in cui  $f = 0$  ho l'EDO

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0, \quad (\text{LO})$$

detta *EDO lineare omogenea*, mentre la (L) è detta *EDO lineare non omogenea*. Mediante semplici calcoli si può dimostrare quanto segue usando la linearità dell'operazione di derivazione.

**Proposizione 4.1.** *Se  $x_1$  e  $x_2$  sono soluzioni di (LO) allora per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  la funzione  $\lambda x_1 + \mu x_2$  è soluzione di (LO).*

*Se  $x_1$  e  $x_2$  sono soluzioni di (L), allora  $x_1 - x_2$  è soluzione di (LO).*

*Ne consegue che l'insieme delle soluzioni di (LO) forma un sottospazio vettoriale, mentre l'insieme delle soluzioni di (L) forma un sottospazio affine.*

**Nota 5.** *Si noti la struttura simile a quella delle soluzioni dei sistemi lineari omogenei e non omogenei.*

Il seguente teorema fornisce la dimensione del sottospazio vettoriale delle soluzioni di (LO).

**Teorema 4.2.** *Il sottospazio vettoriale  $\mathcal{W}$  delle soluzioni di (LO) ha dimensione  $n$ .*

*Dimostrazione.* Fissiamo  $t_0 \in I$ . Consideriamo, per ogni  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , i problemi di Cauchy associati all'equazione (LO) aventi condizioni iniziali

$$(CI_k) \quad x^{(j)}(t_0) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Alle condizioni iniziali  $(CI_0), \dots, (CI_{n-1})$  corrispondono le soluzioni dell'equazione (LO) che denotiamo con  $X_0, \dots, X_{n-1}$ , in particolare esse appartengono a  $\mathcal{W}$  e

$$X_k^{(j)}(t_0) = \delta_{jk} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X_k^{(k)}(t_0) = 1 \\ X_k^{(j)}(t_0) = 0 & j \neq k \end{cases} \quad (23)$$

Se dimostriamo che i vettori  $X_0, \dots, X_{n-1}$  formano una base del sottospazio  $\mathcal{W}$ , allora il teorema è dimostrato.

Proviamo che essi sono linearmente indipendenti. Supponiamo che si possa scrivere

$$0 = \lambda_0 X_0 + \dots + \lambda_{n-1} X_{n-1} \quad (24)$$

dove con 0 si indica la funzione costante zero. Se valutiamo le funzioni in  $t_0$  troviamo che vale

$$0 = \lambda_0 X_0(t_0) + \dots + \lambda_{n-1} X_{n-1}(t_0) = \lambda_0 X_0(t_0) = \lambda_0$$

usando la (23). Se ora ripetiamo il calcolo derivando  $k$  volte l'espressione (24) e valutando in  $t_0$  troviamo

$$0 = \lambda_0 X_0^{(k)}(t_0) + \dots + \lambda_{n-1} X_{n-1}^{(k)}(t_0) = \lambda_k X_k^{(k)}(t_0) = \lambda_k.$$

Concludiamo quindi che i coefficienti  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$  in (24) sono tutti nulli, provando quindi che  $X_0, \dots, X_{n-1}$  sono linearmente indipendenti.

Proviamo ora che essi generano  $\mathcal{W}$ . Consideriamo una generica soluzione di (LO)  $X \in \mathcal{W}$ , tale che

$$X(t_0) = \bar{x}_0; \quad X^{(k)}(t_0) = \bar{x}_k, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (25)$$

Definiamo quindi  $\bar{X} = \bar{x}_0 X_0 + \dots + \bar{x}_{n-1} X_{n-1} \in \mathcal{W}$ . La funzione  $\bar{X}$  soddisfa anch'essa le condizioni iniziali (25), ma le soluzioni ai problemi di Cauchy sono uniche: quindi  $X = \bar{X}$ , provando che  $X$  si può scrivere come combinazione lineare di  $X_0, \dots, X_{n-1}$ . Quindi formano una base.  $\square$

#### 4.1 EDO lineari a coefficienti costanti

Concentriamoci ora al caso in cui le funzioni  $a_j(t)$  sono funzioni costanti (definite quindi su  $\mathbb{R}$ ). Otteniamo la EDO lineare non omogenea

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1x' + a_0x = f(t) \quad (\mathcal{L})$$

(il termine  $f$  spesso è detto *forzante*) e la EDO lineare omogenea

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0. \quad (\mathcal{LO})$$

Iniziamo col considerare ( $\mathcal{LO}$ ). Proviamo a porre  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Sostituendo questa funzione in ( $\mathcal{LO}$ ) troviamo

$$e^{\lambda t} \underbrace{[\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0]}_{p(\lambda)} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'identità vale solo se scegliamo  $\lambda$  fra le soluzioni dell'equazione  $p(\lambda) = 0$  che viene detta *equazione caratteristica*. Il polinomio  $p$  viene detto *polinomio caratteristico*. Tale nome è dovuto al fatto che esso è il polinomio caratteristico della matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Questa matrice si ottiene riscrivendo l'equazione differenziale ( $\mathcal{LO}$ ) come sistema di equazioni differenziali (4) della forma  $\vec{x}' = \mathcal{M}\vec{x}$  seguendo il ragionamento visto in (6). Il membro destro può essere visto come prodotto riga per colonna fra la matrice  $\mathcal{M}$  e le variabili introdotte  $\vec{x}$ . Si calcoli il polinomio caratteristico della matrice  $\mathcal{M}$  per esercizio (suggerimento: ragionare per induzione e applicare il metodo di Laplace sulla prima colonna).

Consideriamo ora una radice  $\lambda$  del polinomio caratteristico. Possono verificarsi diverse situazioni.

- Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  è radice semplice (molteplicità algebrica 1) allora ( $\mathcal{LO}$ ) ha soluzione

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

- Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  è radice con molteplicità doppia allora ( $\mathcal{LO}$ ) ha soluzioni

$$x_1(t) = e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = te^{\lambda t}.$$

- Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  è radice con molteplicità algebrica  $k > 1$  allora ( $\mathcal{LO}$ ) ha soluzioni

$$x_1(t) = e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = te^{\lambda t}, \quad x_3(t) = t^2e^{\lambda t}, \dots, \quad x_k(t) = t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

- Se  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  è radice di  $p$  allora è del tipo  $\lambda = \alpha + i\beta$  con  $\beta \neq 0$ . Contemporaneamente abbiamo che  $\lambda^* = \alpha - i\beta$  è radice di  $p$ . Quindi troviamo due radici di  $p$  a cui corrispondono due soluzioni:

$$x_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad x_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

- Se  $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  è radice di molteplicità  $k$  allora lo è anche  $\lambda^* = \alpha - i\beta$ . Trovo così  $2k$  soluzioni:

$$x_{1,1}(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t), \dots, x_{1,k}(t) = t^{k-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t),$$

$$x_{2,1}(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, x_{2,k}(t) = t^{k-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

A questo punto le  $n$  soluzioni linearmente indipendenti di  $(\mathcal{LO})$  si trovano adottando la procedura precedente per ogni radice del polinomio caratteristico.

**Esempio 4.3.** L'equazione differenziale  $x'' - 5x' + 6x = 0$  ha polinomio caratteristico associato  $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$  con radici semplici 2 e 3. Quindi le soluzioni sono del tipo  $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**Esempio 4.4.** L'equazione differenziale  $x'' - 2x' + x = 0$  ha polinomio caratteristico associato  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$  con radice doppia 1. Quindi le soluzioni sono del tipo  $x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t = e^t(c_1 + t c_2)$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**Esempio 4.5.** L'equazione differenziale  $x'' + \omega^2 x = 0$  ( $\omega > 0$ ) ha polinomio caratteristico associato  $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$  con radici complesse  $\pm i\omega$ . Quindi le soluzioni sono del tipo  $x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . A volte viene usata la notazione  $x(t) = C \sin(\omega t + \phi)$  dove  $C > 0$  e  $\phi \in [0, 2\pi)$ , spesso dette rispettivamente ampiezza e fase. Esprimere le costanti  $c_1$  e  $c_2$  rispetto alle costanti  $C$  e  $\phi$  per esercizio.

**Esempio 4.6.** L'equazione differenziale  $x'' - 4x' + 5x = 0$  ha polinomio caratteristico associato  $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$  con radici complesse  $2 \pm i$ . Quindi le soluzioni sono del tipo  $x(t) = c_1 e^{2t} \cos(t) + c_2 e^{2t} \sin(t)$  con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Oppure possiamo scrivere equivalentemente  $x(t) = C e^{2t} \sin(t + \phi)$ .

**Esempio 4.7.** Se  $\lambda = 0$  è radice di  $p$  con molteplicità  $k$  allora i polinomi  $1, t, t^2, \dots, t^{k-1}$  sono soluzioni di  $(\mathcal{LO})$ . Nel caso in cui 0 è radice semplice ho la soluzione costante 1, se invece  $p$  radice doppia trovo le soluzioni 1 e  $t$ .

**Nota 6.** Nel caso  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  spesso si introduce l'esponenziale complesso

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)],$$

che è una funzione a valori complessi.

Passiamo ora a considerare l'equazione non omogenea  $(\mathcal{L})$ . Abbiamo visto che una soluzione di  $(\mathcal{L})$  si scriverà come

$$x(t) = \bar{x}(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

dove  $x_1, \dots, x_n$  sono le soluzioni dell'equazione omogenea  $(\mathcal{LO})$  e  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Infine  $\bar{x}$  è una particolare soluzione di  $(\mathcal{L})$ . Quindi ci basta trovare un metodo che ci fornisca una soluzione di  $(\mathcal{L})$  e a partire da questa possiamo recuperare tutte le soluzioni di  $(\mathcal{L})$ .

## 4.2 Metodo della somiglianza

Questo metodo a volte viene chiamato *tecnica dell'Ansatz*. Questo metodo consiglia di cercare la soluzione particolare dell'equazione  $(\mathcal{L})$  provando con una funzione test che somigli alla funzione  $f$ . In particolare

se $f$ è	allora provo ponendo $\bar{x}(t) =$
un polinomio di grado $d$	un polinomio di grado $d$
$e^{\alpha t}$	$A e^{\alpha t}, A \in \mathbb{R}$
$\sin(\alpha t)$ o $\cos(\alpha t)$	$A \sin(\alpha t) + B \cos(\alpha t), A, B \in \mathbb{R}$

Se  $f = \lambda f_1 + \mu f_2$  è combinazione lineare di funzioni come quelle sopra, grazie alla linearità di  $(\mathcal{L})$ , potrò cercare delle soluzioni  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  a partire dalle funzioni  $f_1$  e  $f_2$  rispettivamente, quindi la soluzione cercata sarà data da  $\bar{x} = \lambda \bar{x}_1 + \mu \bar{x}_2$ .

Inoltre dobbiamo porre attenzione alla seguente possibilità: se la funzione  $f$  è tra le soluzioni dell'equazione omogenea associata  $(\mathcal{LO})$  allora la funzione test andrà moltiplicata per  $t$ .



**Esempio 4.8.** Consideriamo l'equazione

$$(F) \quad x'' - 5x' + 6x = f(t).$$

Essa avrà soluzioni del tipo  $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + \bar{x}(t)$ , infatti  $c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$  risolve l'equazione omogenea associata per ogni coppia di valori  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Dobbiamo quindi ricavare la funzione  $\bar{x}(t)$  a partire dal tipo di forzante che abbiamo davanti.

- Supponiamo  $f(t) = e^t$ . Allora cerchiamo una soluzione per (F) provando con la funzione  $Ae^t$ . Sostituendo in (F) tale espressione troviamo

$$\begin{aligned} (Ae^t)'' - 5(Ae^t)' + 6(Ae^t) &= e^t \\ \Rightarrow \cancel{e^t} [A - 5A + 6A] &= \cancel{e^t} \\ \Rightarrow A &= 1/2. \end{aligned}$$

Troviamo quindi che  $\bar{x}(t) = \frac{1}{2}e^t$  risolve (F). Quindi le soluzioni di (F) sono tutte del tipo

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2}e^t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Consideriamo ora il caso  $f(t) = t^2$ . La funzione test sarà in questo caso un polinomio di grado 2:  $\bar{x}(t) = At^2 + Bt + C$ , con  $A, B, C \in \mathbb{R}$ . Sostituendo le derivate di  $\bar{x}$  in (F) troviamo

$$\begin{aligned} (2A) - 5(2At + B) + 6(At^2 + Bt + C) &= t^2 \\ \Rightarrow 6At^2 + (-10A + 6B)t + (2A - 5B + 6C) &= t^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} 6A = 1 \\ -10A + 6B = 0 \\ 2A - 5B + 6C = 0 \end{cases} &\Rightarrow (A, B, C) = \left( \frac{1}{6}, \frac{5}{18}, \frac{19}{108} \right) \end{aligned}$$

ottenendo un sistema facilmente risolvibile dal punto di vista teorico, un po' meno per quanto riguarda i calcoli espliciti.

- Se invece vale  $f(t) = \sin t$  la funzione test è  $A \sin t + B \cos t$  da cui, sostituendo in (F) troviamo

$$\begin{aligned} (-A \sin t - B \cos t) - 5(A \cos t - B \sin t) + 6(A \sin t + B \cos t) &= \sin t \\ \Rightarrow \sin t(5A + 5B) + \cos t(5B - 5A) &= \sin t \end{aligned}$$

da cui perveniamo al sistema di equazioni  $A + B = 1/5$  e  $A = B$  trovando la soluzione  $\bar{x}(t) = \frac{1}{10}(\sin t + \cos t)$ .

- Veniamo al caso risonante,  $f(t) = e^{2t}$ , ovvero il caso in cui  $f$  risolve l'equazione omogenea. Stavolta il test va fatto con la funzione  $Ate^{2t}$ , con  $A \in \mathbb{R}$ . Sostituendo troviamo:

$$\begin{aligned} A(4e^{2t} + 4te^{2t}) - 5A(e^{2t} + 2te^{2t}) + 6Ate^{2t} &= e^{2t} \\ \Rightarrow te^{2t}(4A - 10A + 6A) + e^{2t}(4A - 5A) &= e^{2t} \\ \Rightarrow A &= -1 \end{aligned}$$

che porta alla soluzione  $\bar{x}(t) = -te^{2t}$ . Si noti che la prima parentesi porta ad una parentesi nulla, infatti per ottenere questi termini non abbiamo mai derivato nella funzione test la  $t$  ma solo l'esponenziale. L'annullarsi della parentesi è legato al fatto che la funzione  $e^{2t}$  risolve l'equazione omogenea associata.

- Se  $f(t) = 2t^2 + 3 \sin t$ , ovvero  $f$  è combinazione lineare di funzioni più semplici, allora queste si trattano separatamente come nei punti precedenti e poi si ricombinano le soluzioni trovate:

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t} + 2 \left( \frac{1}{6}t^2 + \frac{5}{18}t + \frac{19}{108} \right) + 3 \left( \frac{1}{10}(\sin t + \cos t) \right).$$

**Esempio 4.9.** Perché nell'esercizio precedente è comparsa la parola risonante? Tale parola si incontra in fisica quando il forzante di un oscillatore armonico è soluzione dell'oscillatore armonico non forzato. Consideriamo quindi l'equazione differenziale

$$x'' + \omega^2 x = \sin(\omega t), \quad \omega > 0.$$

Poiché  $\sin(\omega t)$  è una delle soluzioni dell'equazione omogenea associata, allora cerchiamo la soluzione particolare  $\bar{x}$  di questo sistema sostituendo

$$\bar{x}(t) = At \sin(\omega t) + Bt \cos(\omega t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Calcolando le derivate di  $\bar{x}$  e sostituendo nell'equazione differenziale troviamo

$$2A\omega \cos(\omega t) - \underline{A\omega^2 t \sin(\omega t)} - 2B\omega \sin(\omega t) - \underline{B\omega^2 t \cos(\omega t)} \\ + \underline{A\omega^2 t \sin(\omega t)} + \underline{B\omega^2 t \cos(\omega t)} = \sin(\omega t).$$

da cui troviamo  $A = 0$  e  $B = -1/2\omega$ . Quindi le soluzioni sono del tipo

$$x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) - \frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t).$$

Notiamo che la funzione  $x$  è illimitata per  $t \rightarrow \infty$  e presenta oscillazioni con ampiezza crescente.

**Esempio 4.10.** Può andarci peggio di come abbiamo già visto? Certo che sì, non c'è limite al peggio! Consideriamo l'equazione differenziale

$$x'' - 2x' + x = e^t,$$

che ha come soluzioni dell'omogenea associata  $c_1 e^t + c_2 t e^t$ . Essendo il forzante  $f(t) = e^t$  soluzione dell'equazione omogenea associata, da regolamento dovremmo usare come funzione test  $Ate^t$ , ma questa è ancora una soluzione dell'equazione omogenea associata. Quindi dobbiamo ancora salire con il grado del polinomio davanti all'esponenziale e provare con  $\bar{x}(t) = At^2 e^t$ . Con un po' di calcoli, troviamo

$$A(2e^t + 4te^t + t^2 e^t) - 2A(2te^t + t^2 e^t) + At^2 e^t = e^t \\ \Rightarrow At^2 e^t (1 - 2 + 1) + Ate^t (4 - 4) + Ae^t (2) = e^t,$$

da cui  $A = 1/2$  e la soluzione dell'equazione differenziale risulta

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Spesso questo tipo di equazioni sono dette doppiamente risonanti. Come esercizio scrivere un'equazione triplamente risonante.

In tutti gli esempi precedenti non sono stati considerati problemi di Cauchy. Chiaramente, una volta trovato l'integrale generale (tutte le possibili soluzioni) dell'equazione differenziale, basta sostituire i dati iniziali, che negli esempi precedenti saranno del tipo

$$x(t_0) = \bar{x}, \quad x'(t_0) = \bar{v},$$

nella soluzione generale e trovare così le costanti  $c_1, c_2$  adatte risolvendo un semplice sistema di equazioni.

### 4.3 Il metodo di variazione delle costanti

Qui vedremo un approccio pratico al problema nel caso di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Per una versione completa della teoria si veda il Capitolo 5 del libro Analisi Matematica 2 di Fusco, Marcellini, Sbordone.

Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t) \tag{VC}$$

e l'equazione omogenea associata

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0. \tag{VCO}$$

dove le funzioni  $a_0, a_1, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue. Supponiamo di conoscere (cosa non scontata!) le soluzioni di (VCO), ovvero supponiamo di sapere che essa ha soluzioni

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Vorremmo trovare le soluzioni di (VC) tentando con una soluzione del tipo

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t), \quad (26)$$

dove ora  $c_1$  e  $c_2$  sono funzioni derivabili due volte, da determinare. Per questo motivo, questo metodo si chiama *metodo di variazione delle costanti*. Se deriviamo la (26) troviamo

$$x' = c_1' x_1 + c_1 x_1' + c_2' x_2 + c_2 x_2' \quad (27)$$

(da qui in avanti omettiamo di esplicitare la dipendenza da  $t$  per rendere più facile la visualizzazione dei passaggi). Supponiamo quindi che le funzioni  $c_1$  e  $c_2$  si *comportino come delle costanti* ipotizzando

$$c_1' x_1 + c_2' x_2 = 0. \quad (28)$$

Infatti se  $c_1$  e  $c_2$  fossero veramente delle costanti, avrebbero derivata nulla e la (28) sarebbe valida.

La (27) diventa quindi

$$x' = c_1 x_1' + c_2 x_2'. \quad (29)$$

Derivando ancora la (29) troviamo

$$x'' = c_1' x_1' + c_1 x_1'' + c_2' x_2' + c_2 x_2''. \quad (30)$$

Assumiamo ora che  $x$  risolva (VC) e ricordiamo che  $x_1$  e  $x_2$  risolvono (VCO). Troviamo

$$-a_1 x' - a_0 x + g = c_1' x_1' + c_1(-a_1 x_1' - a_0 x_1) + c_2' x_2' + c_2(-a_1 x_2' - a_0 x_2).$$

Quindi riordinando un po' i termini otteniamo

$$a_1 \underbrace{(c_1 x_1' + c_2 x_2' - x')}_{=0} + a_0 \underbrace{(c_1 x_1 + c_2 x_2 - x)}_{=0} + g = c_1' x_1' + c_2' x_2',$$

dove i termini nelle parentesi sono nulli viste le equazioni (26) e (29). Otteniamo quindi semplicemente

$$g = c_1' x_1' + c_2' x_2'.$$

Unendo questa equazione alla condizione (28) che abbiamo imposto, troviamo un sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) = 0 \\ x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) = g(t). \end{cases} \quad (31)$$

dove le incognite da trovare sono i valori  $c_1'(t)$  e  $c_2'(t)$  al variare di  $t \in I$ .

Possiamo *sperare* di applicare il teorema di Cramer per trovare le soluzioni di questo sistema lineare trovando:

$$c_1'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ g & x_2' \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}} = \frac{-g(t)x_2(t)}{W(t)}$$

$$c_2'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_1' & g \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}} = \frac{g(t)x_1(t)}{W(t)}$$

dove abbiamo definito il Wronskiano  $W : I \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

Naturalmente quest'ultima funzione gioca un ruolo fondamentale: per poter utilizzare il teorema di Cramer ci serve che

$$W(t) \neq 0, \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Per fortuna ciò accade (sotto opportune ipotesi) e lo mostreremo qui di seguito. Notiamo che sia  $c_1'$  e  $c_2'$  sono continue e possiamo calcolarne le loro primitive, trovando la soluzione desiderata. Il fatto che le primitive  $c_1$  e  $c_2$  saranno determinate a meno di costanti combacia col fatto che ci servono infinite possibili soluzioni.

Abbiamo visto col Teorema 4.2 che ogni equazione differenziale lineare di ordine  $n$  (LO) ammette  $n$  soluzioni linearmente indipendenti  $x_1, \dots, x_n$ . Quindi per esse vale

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) = 0 \quad \forall t \in I \iff \alpha_i = 0, \forall i.$$

Inoltre possiamo derivare questa identità fino a  $n - 1$  volte e ottenere:

$$\alpha_1 x_1^{(k)}(t) + \alpha_2 x_2^{(k)}(t) + \dots + \alpha_n x_n^{(k)}(t) = 0, \quad \forall k = 0, \dots, n - 1, \forall t \in I.$$

Consideriamo quindi il sistema omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) = 0, \\ \alpha_1 x_1'(t) + \alpha_2 x_2'(t) + \dots + \alpha_n x_n'(t) = 0, \\ \vdots \\ \alpha_1 x_1^{(n-1)}(t) + \alpha_2 x_2^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_n x_n^{(n-1)}(t) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

nelle variabili  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  e definiamo il Wronskiano

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad (33)$$

come determinante della matrice associata al sistema (32).

**Proposizione 4.11.** *Date  $n$  funzioni  $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , vale*

$$x_1, \dots, x_n \text{ sono linearmente dipendenti} \Rightarrow W(t) = 0, \forall t \in I. \quad (34)$$

*Dimostrazione.* Se  $x_1, \dots, x_n$  sono linearmente dipendenti allora esistono coefficienti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  non tutti nulli tali che

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) = 0, \quad \forall t \in I,$$

derivando questa espressione fino alla derivata  $n - 1$ -esima, troviamo che il vettore  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  è soluzione non banale per il sistema (32) per ogni istante  $t \in I$ . Quindi deve valere  $W(t) = 0$  per ogni  $t \in I$ .  $\square$

Dalla Proposizione 4.11 segue immediatamente

$$\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_n \text{ sono linearmente indipendenti.} \quad (35)$$

Notiamo che per dimostrare la Proposizione 4.11 non abbiamo usato che  $x_1, \dots, x_n$  risolvono una qualche equazione differenziale, ma abbiamo chiesto semplicemente che siano funzioni.

**Osservazione 4.12.** *Si noti che*

$$x_1, \dots, x_n \text{ sono linearmente indipendenti} \not\Rightarrow W(t) \neq 0, \forall t \in I.$$

*Se infatti scegliamo come funzioni i monomi  $t^{n+1}, t^{n+2}, \dots, t^{2n}$  queste funzioni sono linearmente indipendenti ma la matrice che appare in (33) è la matrice nulla per  $t = 0$  e quindi  $W(0) = 0$ .*

Vediamo ora cosa possiamo ottenere aggiungendo l'ipotesi che  $x_1, \dots, x_n$  risolvono (LO).

**Teorema 4.13.** *Siano  $x_1, \dots, x_n$  soluzioni di (LO). Supponiamo esista  $t_0 \in I$  tale che  $W(t_0) = 0$ , allora le soluzioni sono linearmente dipendenti.*

*Dimostrazione.* Supponiamo di avere  $t_0 \in I$  tale che  $W(t_0) = 0$ . Allora esiste  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$  che risolve il sistema (32) per  $t = t_0$ . Allora introducendo la funzione

$$u(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t)$$

notiamo che essa risolve, per linearità, l'equazione differenziale (LO) e, valendo (32), troviamo le seguenti condizioni iniziali

$$u(t_0) = 0, u'(t_0) = 0, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Valendo il teorema di unicità delle soluzioni per i problemi di Cauchy per l'equazione differenziale LO, abbiamo  $u \equiv 0$ , ovvero  $u$  è la soluzione nulla. In particolare vale

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) = 0$$

per ogni scelta di  $t \in I$ . Segue quindi che  $x_1, \dots, x_n$  sono linearmente dipendenti.  $\square$

Il teorema afferma che basta verificare il valore del Wronskiano in un solo istante  $t_0 \in I$  per avere informazioni sulla lineare indipendenza delle soluzioni. Ovvero

$$\exists t_0 \in I : W(t_0) = 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_n \text{ sono linearmente dipendenti.} \quad (36)$$

Quindi possiamo chiudere il seguente anello di implicazioni

$$\begin{aligned} & x_1, \dots, x_n \text{ sono soluzioni di (LO) linearmente dipendenti} \\ & \xrightarrow{\text{Prop.4.11}} W(t) = 0, \forall t \in I \xrightarrow{\text{ovvio}} \exists t_0 \in I : W(t_0) = 0 \\ & \xrightarrow{\text{Th.4.13}} x_1, \dots, x_n \text{ sono soluzioni di (LO) linearmente dipendenti.} \end{aligned} \quad (37)$$

Esso si riassume nella caratterizzazione

$$\begin{aligned} & x_1, \dots, x_n \text{ sono soluzioni di (LO) linearmente dipendenti} \\ & \iff W(t) = 0, \forall t \in I. \end{aligned} \quad (38)$$

Essa risulta equivalente a

$$\begin{aligned} & x_1, \dots, x_n \text{ sono soluzioni di (LO) linearmente indipendenti} \\ & \iff \exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Dal Teorema 4.13 segue il seguente corollario.

**Corollario 4.14.** *Siano  $x_1, \dots, x_n$  soluzioni di (LO). Supponiamo  $W(t_0) \neq 0$  per un certo istante  $t_0 \in I$ . Allora  $W(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $W(t_0) \neq 0$  per un certo istante  $t_0 \in I$ . Se avessi l'esistenza di un  $t_1 \in I$  tale che  $W(t_1) = 0$ , dal Teorema 4.13 avrei che  $x_1, \dots, x_n$  sono linearmente dipendenti e quindi che  $W(t) = 0$  per ogni  $t \in I$ . In particolare troverei  $W(t_0) = 0$  portando ad una contraddizione con l'ipotesi. Segue quindi che deve valere  $W(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ .  $\square$

Di conseguenza possiamo concludere anche che

$$\begin{aligned} & x_1, \dots, x_n \text{ sono soluzioni di (LO) linearmente indipendenti} \\ & \xLeftrightarrow{(39)} \exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0 \xLeftrightarrow{\text{Cor.4.14}} W(t) \neq 0, \forall t \in I. \end{aligned} \quad (40)$$

Concludiamo questa parte sottolineando che usualmente la Proposizione 4.11, il Teorema 4.13 e il Corollario 4.14 e le caratterizzazioni (38) e (40) vengono collezionate spesso in un unico Teorema che porta il nome di **Teorema del Wronskiano**.

**Esempio 4.15.** *Consideriamo ora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'' + 4x = \frac{1}{\sin(2t)}, \\ x(\frac{3}{4}\pi) = 1 \\ x'(\frac{3}{4}\pi) = -1 \end{cases}$$

per cui va posto  $t \notin \{k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Essendo il dato iniziale  $\frac{3}{4}\pi$  nell'intervallo  $I = (\pi/2, \pi)$  allora la soluzione che troveremo sarà definita in questo intervallo. Si noti quindi che vale sì il teorema di esistenza globale, ma fintantoché la variabile  $t$  ha "un dominio in cui stare".

L'equazione omogenea associata è  $x'' + 4x = 0$  di cui conosciamo le soluzioni:  $c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)$  essendo  $\lambda = \pm 2i$  le radici del polinomio caratteristico. Cerchiamo quindi soluzioni del tipo

$$x(t) = c_1(t) \sin(2t) + c_2(t) \cos(2t).$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \sin(2t)c_1'(t) + \cos(2t)c_2'(t) = 0 \\ 2 \cos(2t)c_1'(t) - 2 \sin(2t)c_2'(t) = \frac{1}{\sin(2t)}. \end{cases}$$

Calcoliamo facilmente  $W(x) = -2 \neq 0$  Troviamo quindi le soluzioni:

$$c_1'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & \cos(2t) \\ \frac{1}{\sin(2t)} & -2 \sin(2t) \end{pmatrix}}{-2} = \frac{1 \cos(2t)}{2 \sin(2t)},$$

$$c_2'(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} \sin(2t) & 0 \\ \cos(2t) & \frac{1}{\sin(2t)} \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi ne calcoliamo le primitive:

$$c_1(t) = \frac{1}{4} \log |\sin(2t)| + A, \quad c_2(t) = -\frac{1}{2}t + B.$$

Quindi

$$x(t) = \left( \frac{1}{4} \log |\sin(2t)| + A \right) \sin(2t) + \left( -\frac{1}{2}t + B \right) \cos(2t).$$

Notiamo che  $A \sin(2t) + B \cos(2t)$  è soluzione dell'omogenea, quindi primitivando  $c_1'$  e  $c_2'$  otteniamo coerentemente l'infinità di soluzioni dell'equazione differenziale come previsto dalla teoria. A questo punto sostituiamo le condizioni iniziali del problema di Cauchy e ricaviamo  $A$  e  $B$ . Le derivate di  $x$  risulta:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \left[ \frac{\cos(2t)}{\sin(2t)} \frac{1}{2} \right] \sin(2t) + \left[ \frac{1}{4} \log |\sin(2t)| + A \right] 2 \cos(2t) + \\ &\quad - \frac{1}{2} \cos(2t) + \left[ B - \frac{1}{2}t \right] (-2) \sin(2t) \\ &= \left[ \frac{1}{4} \log |\sin(2t)| + A \right] 2 \cos(2t) + \left[ B - \frac{1}{2}t \right] (-2) \sin(2t) \end{aligned}$$

Il fatto che siamo incorsi in questa semplificazione non è un colpo di fortuna, anzi dovrebbe accadere ogni volta! Infatti questa semplificazione è dovuta alla richiesta fatta in (28) ed equivale alla prima equazione del sistema sopra! Si noti inoltre che l'espressione di  $x'$  ottenuta coincide con la (29). Sostituendo ora le condizioni iniziali del problema di Cauchy abbiamo

$$x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left[ \frac{1}{4} \log \left| \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \right| + A \right] \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \left[ B - \frac{3}{8}\pi \right] \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

da cui segue  $A = -1$  e

$$x'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \left[ \frac{1}{4} \log \left| \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \right| + A \right] 2 \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \left[ B - \frac{3}{8}\pi \right] (-2) \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

da cui recuperiamo  $B = \frac{3}{8}\pi - \frac{1}{2}$ .