Gli integrali della fisica

In quanto segue utilizzeremo termini *da fisici*. Alcuni libri di Analisi 2 utilizzano termini *da matematici*. A seconda del libro scelto, lo studente troverà terminologie differenti. Questa parte del corso verrà spesso svolta in maniera *informale*. Le diverse righe nella tabella sottostante mettono a confronto i corrispettivi termini per un matematico e un fisico. Precisiamo che le definizioni non coincidono, ma, nella sostanza, si riferiscono allo stesso concetto.

Il matematico definisce	Il fisico definisce
una 1-forma differenziale	un campo vettoriale
una 1-forma diff. esatta	un campo conservativo
una 1-forma diff. chiusa	un campo irrotazionale
la primitiva di una 1-forma diff.	un potenziale
una 2-forma differenziale	un campo vettoriale
una 2-forma diff. chiusa	un campo indivergente
la primitiva di una 2-forma diff.	un potenziale vettore

Si noti come nel precedente elenco la nozione fisica di campo vettoriale assume due significati diversi per un matematico. Per chi ha già avuto la fortuna di studiare fisica alla scuola superiore la differenza sta nell'uso che si fa di un campo vettoriale: si può calcolarne il *flusso* o la *circuitazione*. Queste matematicamente sono nozioni diverse che richiedono strutture matematiche diverse.

1 Campi vettoriali

In questa sezione tratteremo il concetto di campo vettoriale. L'esempio più semplice dal punto di vista fisico è il campo di forze.

Ricordiamo innanzitutto, data una funzione $\phi : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la notazione per il suo gradiente:

$$\nabla\phi(z, y, z) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y, z)\,,\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y, z)\,,\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, z)\right)$$

Definiamo *campo vettoriale* una funzione continua $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. In questa sezione denoteremo con F_1, F_2, F_3 le sue componenti e con (x, y, z) i punti di $\mathbb{R}^3$. Scriveremo quindi

$$F(x, y, z) = \big(F_1(x, y, z)\,,\ F_2(x, y, z)\,,\ F_3(x, y, z)\big)$$

Un campo vettoriale F si dice di classe C^k se è una funzione di classe C^k.

Il rotore di un campo vettoriale di classe C^1 è definito come segue:

$$\mathrm{rot}F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\,,\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\,,\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

La formula può essere scritta in modo più compatto con il seguente trucco *formalmente scorretto dal punto di vista matematico, ma molto efficace*

$$\nabla \times F = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

dove $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i tre vettori della base canonica. Sviluppando il determinante secondo Laplace sulla prima riga, troviamo la formula precedente.

Infine si definisce la divergenza di un campo vettoriale come

$$\mathrm{div}F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\,.$$

Lo studente noterà come la notazione $\nabla \times F$ (e $\nabla \cdot F$) ben si adatta ad un interpretazione *matematicamente scorretta ma decisamente comoda* di un prodotto vettoriale (e scalare) tra il *vettore* $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ e il *vettore* campo vettoriale $F = (F_1, F_2, F_3)$.

In fisica inoltre viene anche considerato il Laplaciano, definito come segue, data una funzione $\phi : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\Delta\phi = \mathrm{div}(\nabla\phi) = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\,.$$

Tuttavia tale operatore non è argomento di questo corso.

Si dice che un campo vettoriale ammette una *primitiva* se esiste una funzione $\phi : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla\phi = F$. In questo caso il campo si dice *conservativo.*

La primitiva di un campo vettoriale può essere determinata a meno di una costante: dato un qualsiasi numero reale c, se ϕ è una primitiva di F allora anche $\tilde{\phi} = \phi + c$ è una primitiva di F, essendo $\nabla\tilde{\phi} = \nabla\phi = F$.

Osservazione 1.1. *In fisica si usa introdurre la seguente definizione: si dice che un campo vettoriale ammette un* potenziale *se esiste una funzione $U : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla U = -F$. La scelta del segno meno sarà evidente in un momento successivo. La determinazione della primitiva di un campo vettoriale a meno di una costante reale, ha come conseguenza la possibilità di determinare il potenziale a meno di una costante (ovvero di imporre che in un certo punto il potenziale sia zero).*

Un campo vettoriale si dice irrotazionale se ha rotore nullo, ovvero se vale

$$\mathrm{rot}F = \nabla \times F = (0, 0, 0)\,.$$

Osservazione 1.2. *Se un campo vettoriale F di classe C^1 è conservativo allora è irrotazionale.*

Infatti, detta ϕ una sua primitiva (che sarà quindi di classe C^2), possiamo calcolare

$$\nabla \times F = \nabla \times (\nabla\phi) = (0, 0, 0)\,.$$

Effettuare per esercizio i calcoli espliciti. Ad un certo punto si dovrà applicare il teorema di Schwartz di inversione dell'ordine di derivazione, per questo motivo il campo vettoriale deve essere ipotizzato di classe C^1.

La seguente definizione è data direttamente in termini fisici.

Si dice che un campo vettoriale $F : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ammette un *potenziale vettore* se esiste un campo vettoriale $\Psi : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{rot}\Psi = \nabla \times \Psi = F$.

Osservazione 1.3. *L'Osservazione 1.2 ci suggerisce quanto segue: un potenziale vettore può essere determinato a meno del gradiente di una funzione scalare. Ovvero, se Ψ è un potenziale vettore per F allora, per ogni funzione $\phi : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 avremo che $\tilde{\Psi} = \Psi + \nabla\phi$ è anche un potenziale vettore per F, infatti*

$$\nabla \times \tilde{\Psi} = \nabla \times \Psi + \nabla \times (\nabla\phi) = \nabla \times \Psi\,.$$

Un campo vettoriale si dice *indivergente* se ha divergenza nulla, ovvero se

$$\mathrm{div}F = \nabla \cdot F = 0\,.$$

Osservazione 1.4. *Se un campo vettoriale F di classe C^1 ammette potenziale vettore allora è indivergente.*

Infatti, detto Ψ un suo potenziale vettore (che sarà quindi di classe C^2), possiamo calcolare

$$\nabla \cdot F = \nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0\,.$$

Effettuare per esercizio i calcoli espliciti, come per l'Osservazione 1.2

2 Curve e integrazione su curve

2.1 Curve

Definizione 2.1. *Si dice curva una funzione continua $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ dove I è un intervallo. L'immagine $\gamma(I)$ si dice sostegno della curva. Una curva si dice limitata (illimitata) se il suo sostegno è un insieme limitato (illimitato).*

Una curva si dice chiusa *se $I = [a, b]$ è un intervallo chiuso e limitato e vale $\gamma(a) = \gamma(b)$.*
Si dice semplice *se è iniettiva eccetto al più gli estremi. Ovvero una curva γ è semplice se e solo se vale*

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2)\,, \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_2 \text{ oppure } t_1 = a\,, t_2 = b\,.$$

Una curva si dice regolare *se è di classe C^1 e vale $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathring{I}$. Una curva si dice* regolare a tratti *se esiste una partizione P dell'intervallo I*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b\,,$$

tale che la restrizione su ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ è una curva regolare. Data una curva regolare, diremo velocità la derivata della curva $\gamma' : I \to \mathbb{R}^N$. Data una curva regolare $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$, possiamo considerare i versori tangenti alla curva nel modo seguente

$$\hat{\tau} : \mathring{I} \to \mathbb{R}^N\,, \qquad \hat{\tau}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\,.$$

La definizione di curva semplice potrebbe sembrare un po' strana, ma verrà chiarita dagli esempi successivi. Per il frattempo si noti che se scegliessimo la definizione *una curva è semplice se e solo se è iniettiva* automaticamente ogni curva chiusa non potrebbe essere semplice.

Osservazione 2.2. *Data una curva (regolare) $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ e un intervallo $J \subset I$, la restrizione $\gamma|_J : J \to \mathbb{R}^N$ è ancora una curva (regolare).*

Esercizio 2.3. *Dimostrare che una curva chiusa è necessariamente limitata.*

Nel linguaggio comune con la parola curva si identifica quello che matematicamente è il sostegno della curva. Forniamo alcuni esempi di curve.

Esempio 2.4 (Rette e segmenti)**.** *Dati un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^N$, la funzione $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ definita come $\ell(t) = x_0 + tv$ è una curva regolare. Il suo sostegno è una retta. Prendendo una sua restrizione ad un intervallo compatto, troveremo una curva avente come sostegno un segmento.*

Esempio 2.5 (La circonferenza)**.** *Dato un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $R > 0$, la funzione $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita come $\gamma(t) = (x_0 + R\cos t\,,\ y_0 + R\sin t)$ è una curva. Si verifichi che è regolare, semplice e chiusa. Il suo sostegno è la circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio R.*

Esempio 2.6 (L'ellisse)**.** *L'ellisse di centro (x_0, y_0) e semiassi $a, b > 0$ definita dall'equazione*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

è sostegno della curva: $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita come $\gamma(t) = (x_0 + a\cos t\,,\ y_0 + b\sin t)$. Si verifichi che è regolare, semplice e chiusa.

Esempio 2.7 (Le iperboli)**.** *Le iperboli di centro (x_0, y_0) e semiassi $a, b > 0$ definite dalle equazioni*

$$\mathcal{I}_1 : \ \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,, \qquad \mathcal{I}_2 : \ \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1\,,$$

sono entrambe l'unione dei sostegni di due curve: $\gamma_i^{\pm} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2)$ definite come

$$\gamma_1^{\pm}(t) = (x_0 \pm a\cosh t\,,\ y_0 + b\sinh t)\,, \qquad \gamma_2^{\pm}(t) = (x_0 + a\sinh t\,,\ y_0 \pm b\cosh t)$$

Si verifichi che sono tutte curve regolari, semplici e illimitate.

Esempio 2.8 (Grafici)**.** *Consideriamo una funzione $f : I \to \mathbb{R}^N$ continua. Allora la curva $\gamma : I \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ definita come $\gamma(t) = (t, f(t))$ ha come sostegno il grafico di f. Inoltre γ è semplice. Se in più f è di classe C^1, allora la curva γ è regolare.*

Esempio 2.9 (La circonferenza - parte seconda). *Le seguenti curve hanno tutte per sostegno la circonferenza centrata nell'origine e raggio 1, ma hanno diverse proprietà.*

Le curve $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *definite come* $\gamma_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ *e* $\gamma_2(\theta) = (\cos\theta, -\sin\theta)$ *sono entrambe semplici chiuse e regolari. Hanno lo stesso punto iniziale e finale. Esse differiscono nel* verso di percorrenza *della circonferenza. La prima la percorre in senso antiorario, la seconda in senso orario.*

Anche la curva $\gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *definita come* $\gamma_3(\theta) = (\sin\theta, \cos\theta)$ *è semplice chiusa e regolare, e percorre la circonferenza in senso orario, ma non ha lo stesso punto iniziale e finale di* γ_2.

Le curve $\gamma_4 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ *e* $\gamma_5 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *definite rispettivamente come* $\gamma_4(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ *e* $\gamma_5(\theta) = (\cos(2\theta), \sin(2\theta))$ *sono chiuse, regolari, ma non semplici. La circonferenza infatti viene* percorsa due volte.

Ricordiamo che un C^1-diffeomorfismo è una funzione $f : A \to B$ di classe C^1 che ammette inversa $f^{-1} : B \to A$ anch'essa di classe C^1.

Definizione 2.10. *Due curve regolari* $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$ *e* $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^N$ *si dicono equivalenti se hanno lo stesso sostegno ed esiste un* C^1*-diffeomorfismo* $\varphi : I_1 \to I_2$ *tale che* $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. *Si dirà che le due curve hanno la stessa orientazione se* $\varphi'(s) > 0$ *per ogni* $s \in I_1$. *Se invece avremo* $\varphi'(s) < 0$ *per ogni* $s \in I_1$ *si dirà che hanno orientazione opposta.*

Esercizio 2.11. *Dimostra che la precedente è una relazione di equivalenza.*

Esercizio 2.12. *Perché non è possibile avere che* φ' *cambi segno in* I_1*?*

Definizione 2.13. *Dato un insieme* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$, *diremo che la curva* $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ *è una* parametrizzazione *di* $\mathcal{C}$ *se* $\gamma(I) = \mathcal{C}$ *e* γ *è regolare e, ristretta all'interno di* I, *risulta iniettiva.*

Esempio 2.14 (La circonferenza - parte terza). *Richiamiamo le curve contenute nell'Esempio 2.9. Le curve* γ_1 *e* γ_2 *sono equivalenti con orientazione opposta, prendendo* $\varphi(s) = 2\pi - s$. *Le curve* γ_5 *e* γ_6 *sono equivalenti con la stessa orientazione prendendo* $\varphi(s) = 2s$. *Le curve* γ_1, γ_2, γ_3 *sono tutte parametrizzazioni della circonferenza.*

Esempio 2.15. *Con riferimento all'Esempio 2.4, la curva* $\hat{\ell} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *definita come* $\hat{\ell}(t) = x_0 - tv$ *è equivalente alla curva* ℓ *con orientazione opposta.*

Esercizio 2.16. *Scrivere una parametrizzazione del segmento nel piano di estremi* $A = (2, 3)$ *e* $B = (1, 5)$. *Successivamente trovare una parametrizzazione con orientazione opposta.*

Data una curva regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ è sempre possibile introdurre una curva regolare equivalente con la stessa orientazione nel modo seguente. Definiamo la *lunghezza d'arco* $\sigma : [a, b] \to [0, L]$ definita come

$$\sigma(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau$$

dove il valore L è la *lunghezza della curva* γ dato da

$$L = L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau \,. \tag{1}$$

Notiamo che $\sigma'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$. La funzione σ è quindi crescente ed invertibile. Denotiamo con $\chi : [0, L] \to [a, b]$ la sua inversa. Usando il teorema della derivata dell'inversa, notiamo che $\chi'(s) = \sigma'(\chi(s))^{-1} = \|\gamma'(\chi(s))\|^{-1}$. Definiamo $\tilde{\gamma} : [0, L] \to \mathbb{R}^N$ come $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\chi(s))$. Questa curva è regolare ed equivalente a γ con la stessa orientazione (si noti che l'abbiamo definita proprio introducendo il diffeomorfismo $\varphi = \chi$ richiesto dalla Definizione 2.10). Inoltre vale

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \|\gamma'(\chi(s)) \cdot \chi'(s)\| = \left\| \gamma'(\chi(s)) \cdot \frac{1}{\|\gamma'(\chi(s))\|} \right\| = \|\gamma'(\chi(s))\| \cdot \frac{1}{\|\gamma'(\chi(s))\|} = 1 \,.$$

La curva $\tilde{\gamma}$ è detta *parametrizzazione secondo la lunghezza d'arco.* Sostanzialmente la curva $\tilde{\gamma}$ percorre il sostegno a velocità costantemente uguale a 1.

In quanto precede abbiamo dato per scontato che la formula (1) dia la lunghezza della curva γ. Tale affermazione è conseguenza del **Teorema di rettificabilità**, che afferma appunto che ogni curva regolare ha una lunghezza determinabile secondo la formula (1).

Esercizio 2.17. *Verificare il valore* $\|\gamma'(t)\|$ *delle seguenti curve.*

- *Grafico di una funzione. Data* $\gamma : I \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ *definita come* $\gamma(t) = (t, f(t))$ *dove* $f : I \to \mathbb{R}^N$ *è una funzione di classe* C^1*, allora* $\|\gamma'(t)\|^2 = 1 + \|f'(t)\|^2$.
- *Coordinate polari. Data* $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *definita come* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *dove*

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(\theta(t))\,, \\ y(t) = \rho(t)\sin(\theta(t))\,, \end{cases}$$

con ρ, θ *funzioni di classe* C^1 *(e* ρ *positiva), allora*

$$\|\gamma'(t)\|^2 = [\rho'(t)]^2 + [\rho(t)\theta'(t)]^2$$

In particolare, ponendo $I = [0, 2\pi]$*,* $\rho \equiv R$ *e* $\theta(t) = t$*, troviamo* $\|\gamma'(t)\| = R$.

2.2 Integrazione su curve

Esistono due tipi di integrali lungo una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$. In quanto segue, si consiglia di immaginare $N = 3$ (o anche $N = 2$).

L'integrale di prima specie coinvolge l'integrale di una funzione scalare $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Un esempio è il calcolo della carica disposta lungo una curva, nota la densità lineare di carica.

Definizione 2.18. *Data una curva regolare* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *e una funzione continua* $f : A \to \mathbb{R}$ *definita su un aperto* $A \subset \mathbb{R}^N$*. Supponiamo che il sostegno di* γ *sia contenuto in* A*, allora l'integrale di linea di prima specie di* f *lungo* γ *risulta*

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt\,.$$

Si nota immediatamente che il caso $f \equiv 1$ restituisce la lunghezza della curva γ.

Supponiamo ora di voler calcolare lo stesso integrale usando una curva equivalente $\eta : [c, d] \to \mathbb{R}^N$. Allora dalla definizione, abbiamo l'esistenza di un C^1-diffeomorfismo $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ tale che $\eta(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$ per ogni $\tau \in [c, d]$. Allora, dalla definizione precedente abbiamo

$$\begin{aligned} \int_\eta f\, ds &= \int_c^d f(\eta(\tau))\|\eta'(\tau)\|\, d\tau \\ &= \int_c^d f\big(\gamma(\varphi(\tau))\big)\left[\|\gamma'(\varphi(\tau))\| \cdot |\varphi'(\tau)|\right] d\tau \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_\gamma f\, ds\,. \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il differenziale della composta e il teorema del cambio di variabili.

Abbiamo appena dimostrato che l'integrale di linea di prima specie è *invariante per curve equivalenti.*

L'integrale di seconda specie coinvolge l'integrale di un campo vettoriale $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Un esempio è il calcolo del lavoro di un campo di forze lungo una curva.

Definizione 2.19. *Data una curva regolare* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ *e una funzione continua* $F : A \to \mathbb{R}^N$ *definita su un aperto* $A \subset \mathbb{R}^N$*. Supponiamo che il sostegno di* γ *sia contenuto in* A*, allora l'integrale di linea di seconda specie di* F *lungo* γ *risulta*

$$\int_\gamma F \cdot \hat{\tau}\, ds := \int_a^b \langle F(\gamma(t))\,,\, \gamma'(t)\rangle\, dt\,.$$

Supponiamo ora di voler calcolare lo stesso integrale usando una curva equivalente $\eta : [c, d] \to \mathbb{R}^N$. Allora dalla definizione, abbiamo l'esistenza di un C^1-diffeomorfismo $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ tale che $\eta(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$ per ogni

$\tau \in [c,d]$. Allora, dalla definizione precedente abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_\eta F \cdot \hat{\tau}\, ds &= \int_c^d \langle F(\eta(\tau))\,,\, \eta'(\tau)\rangle\; d\tau \\
&= \int_c^d \big\langle F\big(\gamma(\varphi(\tau))\big)\,,\, \gamma'(\varphi(\tau))\;\varphi'(\tau)\big\rangle\; d\tau \\
&= \int_c^d \big\langle F\big(\gamma(\varphi(\tau))\big)\,,\, \gamma'(\varphi(\tau))\big\rangle\;\; \varphi'(\tau) d\tau \\
&= \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \langle F(\gamma(t))\,,\, \gamma'(t)\rangle\; dt\,.
\end{aligned}$$

dove anche questa volta abbiamo usato il differenziale della composta e il teorema del cambio di variabili.

Se γ e η hanno la stessa orientazione, allora φ è crescente, quindi $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Concludiamo che

$$\int_\eta F \cdot \hat{\tau}\, ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \langle F(\gamma(t))\,,\, \gamma'(t)\rangle\; dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t))\,,\, \gamma'(t)\rangle\; dt = \int_\gamma F \cdot \hat{\tau}\, ds\,.$$

Se invece γ e η hanno orientazione opposta, allora φ è decrescente, quindi $\varphi(c) = b$ e $\varphi(d) = a$. Concludiamo che

$$\int_\eta F \cdot \hat{\tau}\, ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \langle F(\gamma(t))\,,\, \gamma'(t)\rangle\; dt = -\int_a^b \langle F(\gamma(t))\,,\, \gamma'(t)\rangle\; dt = -\int_\gamma F \cdot \hat{\tau}\, ds\,.$$

Abbiamo appena dimostrato che l'integrale di linea di seconda specie è *invariante per curve equivalenti con stessa orientazione*. Invece, in presenza di curve equivalenti con orientazione opposta l'integrale ha segno opposto.

Esercizio 2.20. *Calcola la densità di carica di una spira circolare di raggio R centrata nell'origine avente densità lineare di carica $\lambda(x,y) = xy$.*

Parametrizziamo la spira tramite la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita come $\gamma(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\lambda(\gamma(\theta)) &= (R\cos\theta)(R\sin\theta) = R^2 \sin\theta\cos\theta\,, \\
\|\gamma'(\theta)\| &= \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2} = R\,.
\end{aligned}$$

Impostando la formula per l'integrale abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \lambda\, ds &= \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma(\theta))\|\gamma'(\theta)\|\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} R^3 \sin\theta\cos\theta\, d\theta \\
&= R^3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2}\, d\theta = 0\,.
\end{aligned}$$

3 Superfici e integrazione su superfici

Da qui in avanti si noterà una notazione più compatta per le derivate parziali, preferendo notazioni come Φ_u e Φ_v al posto di $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ e $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$.

3.1 Superfici

Da qui in avanti il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si intende compatto.

Definizione 3.1 (Superficie)**.** *Diremo superficie una funzione continua*

$$\begin{aligned}
&\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\
&\Phi(u,v) = \big(x(u,v)\,,\, y(u,v)\,,\, z(u,v)\big)\,.
\end{aligned}$$

Diremo sostegno della superficie *la sua immagine* $\Sigma = \Phi(\Omega)$. *Una superficie si dice regolare se è una funzione di classe* C^1 *e vale*

$$\big(\Phi_u \times \Phi_v\big)(u, v) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)(u, v) \neq (0, 0, 0)\,, \qquad \forall (u, v) \in \Omega\,.$$

Per ogni superficie regolare è possibile definire l'applicazione

$$\begin{aligned} &\widehat{N}_\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3\,, \\ &\widehat{N}_\Phi(u, v) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|} \end{aligned}$$

che individua in ogni punto $P = \Phi(u, v)$ *un versore normale* $\widehat{N}_\Phi(u, v)$ *alla superficie nel punto* P.

Osservazione 3.2. *Data la superficie* $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *possiamo introdurre l'insieme* riflesso $\widetilde{\Omega} = \{(v, u) \mid (u, v) \in \Omega\}$ *e definire la superficie* $\Psi : \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *come segue* $\Psi(v, u) = \Phi(u, v)$ *in cui sostanzialmente abbiamo scambiato l'ordine delle variabili. Notiamo che* $\widehat{N}_\Psi(v, u) = -\widehat{N}_\Phi(u, v)$.

Concludiamo quindi che nella precedente definizione avremmo potuto anche scegliere di definire il versore normale opposto

$$\begin{aligned} &\widehat{N}^-_\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3\,, \\ &\widehat{N}^-_\Phi(u, v) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|}\,. \end{aligned}$$

Osservazione 3.3. *Si noti che nella precedente definizione, per come è definita l'applicazione* $\widehat{N}_\Phi$, *possiamo trovare (qualora* Φ *non sia iniettiva) due punti* $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \Omega$ *tali che* $\Phi(u_1, v_1) = \Phi(u_2, v_2)$ *ma* $\widehat{N}_\Phi(u_1, v_1) \neq \widehat{N}_\Phi(u_2, v_2)$. *In questo caso ad un punto del sostegno corrispondono due versori normali.*

Definizione 3.4. *Dato un insieme* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, *diremo che la superificie regolare* $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *è una* parametrizzazione *di* Σ *se vale* $\Phi(\Omega) = \Sigma$ *e la sua restrizione all'interno di* Ω *risulta iniettiva.*

Esempio 3.5 (Grafici)**.** *Data una funzione* $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *di classe* C^1, *possiamo definire la superficie regolare* $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *come* $\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$. *In questo caso abbiamo*

$$(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & g_u(u, v) \\ 0 & 1 & g_v(u, v) \\ \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{pmatrix} = (-g_u(u, v), -g_v(u, v), 1)$$

da cui

$$\|(\Phi_u \times \Phi_v)(u, v)\| = \sqrt{1 + g_u^2(u, v) + g_v^2(u, v)}\,.$$

Esempio 3.6 (Cilindro)**.** *Il cilindro di raggio* R *e altezza* h, *descritto come* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2\,, 0 \leq z \leq h\}$ *si può parametrizzare con la superficie* $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, h] \to \mathbb{R}^3$ *dove* $\Phi(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$. *In questo caso abbiamo*

$$\big(\Phi_\theta \times \Phi_z\big)(\theta, z) = \det \begin{pmatrix} -R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{pmatrix} = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

da cui

$$\|\big(\Phi_\theta \times \Phi_z\big)(\theta, z)\| = R\,.$$

Esempio 3.7 (Sfera)**.** *La sfera di raggio* R, *descritta come* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ *si può parametrizzare con la superficie* $\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ *dove* $\Phi(\varphi, \theta) = (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi)$. *In questo caso abbiamo*

$$\begin{aligned} \big(\Phi_\varphi \times \Phi_\theta\big)(\varphi, \theta) &= \det \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{pmatrix} \\ &= (R^2\sin^2\varphi\cos\theta, R^2\sin^2\varphi\sin\theta, R^2\sin\varphi\cos\varphi) \end{aligned}$$

da cui

$$\|(\Phi_\varphi \times \Phi_\theta)(\varphi,\theta)\| = R^2 \sin\varphi\,.$$

In più possiamo notare che, per ogni punto della sfera $\vec{r} = (x,y,z) = \Phi(\varphi,\theta)$ *abbiamo*

$$(\Phi_\varphi \times \Phi_\theta)(\varphi,\theta) = R\sin\varphi\,\Phi(\varphi,\theta)$$

che, normalizzato, ci dà il vettore normale $\widehat{N}_\Phi(\varphi,\theta)$*, che nel punto* $\vec{r}$ *coincide col versore* $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$.

Esempio 3.8 (Il toro)**.** *Il toro di raggi* r *ed* R*, con* $R > r > 0$ *si può parametrizzare nel modo seguente:* $\Phi : [0,2\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ *dove* $\Phi(\varphi,\theta) = ((R + r\cos\varphi)\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\sin\theta, R\sin\varphi)$.

Esempio 3.9 (Il nastro di Möbius)**.** *Il nastro di Möbius di raggio* R *e lato* 2ℓ*, si può parametrizzare nel modo seguente:* $\Phi : [0,2\pi]\times[-\ell,\ell] \to \mathbb{R}^3$ *dove* $\Phi(\theta,d) = ((R + d\cos\frac{\theta}{2})\cos\theta, (R + d\cos\frac{\theta}{2})\sin\theta, d\sin\frac{\theta}{2})$*. Si noti che in questo caso* $\Phi(0,d) = \Phi(2\pi,-d)$ *e* $(\Phi_\theta\times\Phi_d)(0,d) = -(\Phi_\theta\times\Phi_d)(2\pi,-d)$*, notiamo quindi che* dopo un giro *il versore normale* $\widehat{N}_\Phi$ *cambia direzione: abbiamo* $\widehat{N}_\Phi(0,d) = -\widehat{N}_\Phi(2\pi,d)$.

Definizione 3.10. *Due superfici regolari* $\Phi_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^3$ *e* $\Phi_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^3$ *si dicono equivalenti se hanno lo stesso sostegno ed esiste un* C^1*-diffeomorfismo* $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *tale che* $\Phi_1 = \Phi_2\circ\varphi$*. Si dirà che le due curve hanno la stessa orientazione se* $\det J_\varphi(u,v) > 0$ *per ogni* $(u,v)\in\Omega_1$*. Se invece avremo* $\det J_\varphi(u,v) < 0$ *per ogni* $(u,v)\in\Omega_1$ *si dirà che hanno orientazione opposta.*

3.2 Incollamenti di curve e superfici, superfici orientabili, bordi di una superficie e bordi orientati

Questa sezione apparirà poco rigorosa da un punto di vista matematico. Una versione più rigorosa di questa sezione porterebbe questo pdf ad allungarsi troppo.

Incollamento di due curve. Date due curve regolari a tratti $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2 : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^N$ tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(\alpha)$, allora è possibile definire una curva regolare a tratti $\gamma : [a,c] \to \mathbb{R}^N$ che *incolla le due curve.* Infatti possiamo definire $c = b + \beta - \alpha$ e definire la curva regolare a tratti γ nel modo seguente

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t\in[a,b]\,,\\ \gamma_2(t-b+\alpha) & \text{se } t\in[b,c]\,. \end{cases}$$

Naturalmente possiamo incollare un maggior numero (finito) di curve regolari iterando lo stesso ragionamento.

Da qui in avanti sostituiremo spesso e volentieri il termine matematico *superficie* con *sostegno di una superficie*, ovvero utilizzeremo il termine di uso comune. Analogamente per quanto riguarda le curve.

Incollamento di due superfici. Definire in modo rigoroso l'incollamento di due superfici è più complicato. Facciamo dapprima degli esempi: la superficie di un cubo è l'incollamento di 6 superfici *quadrate*, mentre la superficie dei poliedri si ottiene incollando le superfici che ne descrivono le facce. Naturalmente possiamo anche pensare situazioni più complicate.

Vediamo ora come potremmo definire l'incollamento di più superfici. Consideriamo un insieme chiuso $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ tale che esistano dei sottoinsiemi chiusi $\Sigma_1,\dots,\Sigma_N$ tali che $\Sigma = \Sigma_1\cup\dots\cup\Sigma_N$ che siano sostegno di superfici regolari, ovvero assumiamo che esistano $\Phi_k : \Omega_k\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tali che $\Sigma_k = \Phi_k(\Omega_k)$ per ogni $k = 1,\dots,N$.

In questo caso l'insieme Σ è il sostegno dell'incollamento di N superfici.

Superfici con bordo, superfici senza bordo. Supponiamo sia data una superficie regolare $\Phi : \Omega\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tale che l'applicazione Φ sia iniettiva e la frontiera di Ω sia il sostegno una curva semplice chiusa regolare a tratti $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. In particolare $\gamma(I) = \partial\Omega$. Come al solito denotiamo con $\Sigma = \Phi(\Omega)$ il suo sostegno. Definiremo bordo della superficie Φ l'applicazione $\partial\Phi : I \to \mathbb{R}^3$ definita come $\partial\Phi = \Phi\circ\gamma$, ovvero $\partial\Phi(t) = \Phi(\gamma(t))$. Denoteremo con $\partial\Sigma$ l'insieme $\partial\Sigma = \partial\Phi(I) = \Phi(\partial\Omega)$.

Con bordo di una superficie non si intende quindi la frontiera del sostegno $\Sigma = \Phi(\Omega)$ nel senso matematico visto all'inizio del corso. Purtroppo, è prassi comune denotare il suo bordo con la notazione $\partial\Sigma$ (ovvero la stessa della frontiera).

La definizione precedente richiede che Φ sia iniettiva, ma in molti esempi non lo è, come ad esempio per la sfera, il cilindro e il toro. Immaginiamo di essere una persona che cammina su una superficie bidimensionale nello spazio tridimensionale: *il bordo della superficie è il punto in cui la persona non può più proseguire.*

In generale se l'applicazione Φ non è iniettiva, l'introduzione del concetto di bordo è più tecnica.

Vediamo alcuni esempi pratici: l'insieme

$$\Sigma := \Phi(\Omega) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \,, z = 0\} \,,$$

(che è sostanzialmente un cerchio nello spazio, un disco) è ottenuto tramite la parametrizzazione

$$\Phi : \Omega = [0, R] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad \Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \,.$$

Esso ha come bordo (non nel senso di frontiera visto all'inizio del corso!) la circonferenza

$$\partial\Sigma = \Gamma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R^2 \,, z = 0\} \,.$$

Si noti che $\Gamma \subset \Phi(\partial\Omega)$, ma non vale l'uguaglianza.

Utilizzando il metodo descritto sopra per applicazioni Φ iniettive, possiamo facilmente parametrizzare il bordo del rettangolo Ω. Esso è l'unione di quattro segmenti, e quindi possiamo vederlo come l'incollamento delle seguenti quattro curve regolari che lo percorrono in senso antiorario

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, R] &\to \partial\Omega \,, & \gamma_1(r) &= (r, 0) \,, \\ \gamma_2 : [0, 2\pi] &\to \partial\Omega \,, & \gamma_2(\theta) &= (R, \theta) \,, \\ \gamma_3 : [0, R] &\to \partial\Omega \,, & \gamma_3(r) &= (R - r, 2\pi) \,, \\ \gamma_4 : [0, 2\pi] &\to \partial\Omega \,, & \gamma_4(\theta) &= (0, 2\pi - \theta) \,. \end{aligned}$$

Quindi effettuando le composizioni $\ell_k = \Phi \circ \gamma_k$ otteniamo le parametrizzazioni del bordo della superficie.

$$\begin{aligned} \ell_1 : [0, R] &\to \mathbb{R}^3 \,, & \ell_1(r) &= \Phi(r, 0) = (r, 0, 0) \,, \\ \ell_2 : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \,, & \ell_2(\theta) &= \Phi(R, \theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0) \,, \\ \ell_3 : [0, R] &\to \mathbb{R}^3 \,, & \ell_3(r) &= \Phi(R - r, 2\pi) = (R - r, 0, 0) \,, \\ \ell_4 : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \,, & \ell_4(\theta) &= \Phi(0, 2\pi - \theta) = (0, 0, 0) \,. \end{aligned}$$

Notiamo che il sostegno di ℓ_4 si riduce ad un punto e che il sostegno di ℓ_1 coincide con quello di ℓ_3 ma viene percorso in verso opposto. In particolare se volessimo calcolare un integrale di seconda specie lungo le quattro curve precedenti otterremmo

$$\int_{\ell_1} F \cdot \hat{\tau} \, ds = -\int_{\ell_3} F \cdot \hat{\tau} \, ds \,, \qquad \int_{\ell_4} F \cdot \hat{\tau} \, ds = 0 \,.$$

Ciò porta quindi ad ottenere, detto ℓ l'incollamento delle quattro curve,

$$\int_{\ell} F \cdot \hat{\tau} \, ds = \sum_{k=1}^{4} \int_{\ell_k} F \cdot \hat{\tau} \, ds = \int_{\ell_2} F \cdot \hat{\tau} \, ds \,.$$

Notiamo infine che proprio ℓ_2 ha come sostegno l'insieme $\Gamma = \partial\Sigma$ precedentemente introdotto.

Se invece consideriamo la superficie

$$\Phi : \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad \Phi(x, y) = (x, y, 0) \,,$$

essa individua un quadrato nello spazio, il bordo (del sostegno) della superficie $\Sigma = \Phi(\Omega)$ in questo caso è il contorno del quadrato, ovvero i quattro lati:

$$\partial\Sigma = \big(\{0\} \times [0, 1] \times \{0\}\big) \cup \big(\{1\} \times [0, 1] \times \{0\}\big) \cup \big([0, 1] \times \{0\} \times \{0\}\big) \cup \big([0, 1] \times \{1\} \times \{0\}\big) \,.$$

In questo caso, notiamo che vale $\partial\Sigma = \Phi(\partial\Omega)$, ma è un caso particolare.

Infine consideriamo l'insieme

$$\Sigma := \Phi(\Omega) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R^2 \,, z \in [0, h]\} \,,$$

(che è sostanzialmente la superficie curva di un cilindro) che può essere ottenuto tramite la parametrizzazione

$$\Phi : \Omega = [0, h] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \,, \qquad \Phi(z, \theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z) \,.$$

Esso ha come bordo le due circonferenze

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R^2 \,, z = 0\} \cup \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R^2 \,, z = h\} \,.$$

Anche in questo caso abbiamo $\partial\Sigma \subset \Phi(\partial\Omega)$. Possiamo ripetere anche qui un ragionamento simile a quello fatto per la sfera.

Cerchiamo ora di spiegare cosa si intende per superficie senza bordo. Parlando in modo grezzo: *una persona che cammina su una superficie senza bordo non cadrà mai dalla superficie.* Sono superfici senza bordo

- le sfere, come ad esempio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ (una superficie senza bordo limitata viene detta **superficie chiusa**),
- il toro è una superficie senza bordo, quindi una superficie chiusa in quanto è limitato.
- i cilindri (illimitati), come ad esempio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$,
- i piani (illimitati), come ad esempio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.
- sono superfici senza bordo (ottenute tramite l'incollamento di più superfici) le frontiere di solidi come i poliedri (parallelepipedi, piramidi...). Anche queste sono superfici chiuse.

Per le superfici chiuse un ragionamento simile a quello effettuato per il disco mediante le curve γ_k e poi ℓ_k porta a ottenere curve che si riducono ad un punto e/o coppie di curve equivalenti con orientazioni opposte. Nel caso della sfera troveremo due curve fisse al polo sud e al polo nord, e un meridiano percorso nei due versi. Nel caso del toro troveremo due circonferenze percorse in versi opposti.

Orientazione di una superficie. Consideriamo un insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, parametrizzato tramite una superficie regolare $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, cf. Definizione 3.4. In particolare la funzione $\Phi : \mathring{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ è iniettiva e possiamo definire la sua inversa $\Phi^{-1} : \Phi(\mathring{\Omega}) \to \mathring{\Omega}$. Si noti che l'iniettività di Φ non è richiesta su tutto Ω (infatti Φ non è iniettiva in molti esempi fondamentali come la sfera, il toro e il nastro di Möbius).

Dato il campo di versori normali $\widehat{N} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, possiamo definire l'applicazione $\hat{\nu} : \Phi(\mathring{\Omega}) \to \mathbb{R}^3$ tale che $\hat{\nu}(P) = \widehat{N}(\Phi^{-1}(P))$. Diremo che una superficie è **orientabile** se è possibile estendere in modo continuo l'applicazione $\hat{\nu}$ a tutto l'insieme $\Sigma = \Phi(\Omega)$. Tale operazione è possibile per la sfera e il toro, mentre non è possibile per il nastro di Möbius. Infatti, richiamando le notazioni dell'Esempio 3.9, la *non-orientabilità* del nastro di Möbius è conseguenza del fatto che, per ogni $d \in [-\ell, \ell]$, abbiamo $\Phi(0, d) = \Phi(2\pi, -d)$, ma $\widehat{N}(0, d) = -\widehat{N}(2\pi, -d)$.

Naturalmente è possibile anche definire la funzione $\hat{\nu}$ come $\hat{\nu}(P) = -\widehat{N}(\Phi^{-1}(P))$.

La sfera e il toro sono esempi di superfici chiuse e orientabili: per questo tipo di superfici si usa scegliere $\hat{\nu}$ in modo che i vettori $\hat{\nu}(P)$ puntino verso l'*esterno* della superficie.

Nel caso di superfici chiuse costruite incollando diverse superfici come ad esempio le superfici dei poliedri o la frontiera di *mezza palla* costituita da un piano equatoriale e una calotta semisferica, si usa definire le superfici che costituiscono l'incollamento in modo che i vettori $\hat{\nu}(P)$ puntino verso l'*esterno* della superficie.

Orientazione positiva della frontiera di un dominio nel piano. Consideriamo ora un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ la cui frontiera è costituita dall'unione di sostegni di curve regolari. La frontiera si dice orientata positivamente e si indica con $\partial^+ D$ se tali curve sono orientate in modo da percorrere la frontiera in modo da *avere sulla sinistra* l'insieme D. Quindi dobbiamo percorrere il bordo di D in senso antiorario, con la seguente precisazione: se il dominio D ha un *buco* allora il *bordo del buco* va percorso in senso orario.

Tale accorgimento è stato già preso precedentemente: si rimanda alle curve γ_k introdotte come bordo dell'insieme Ω che parametrizzava il disco.

Orientazione positiva del bordo di una superficie. L'orientazione del bordo di una superficie orientabile $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ si ottiene in modo analogo a quanto esposto nel paragrafo precedente. Data l'orientazione $\hat{\nu}$ introdotta sopra, orientiamo il bordo della superficie nel modo seguente: *una persona che cammina sul bordo della superficie con la testa rivolta nel verso indicato da $\hat{\nu}$, deve avere la superficie Σ alla sua sinistra.* In questo caso, il bordo si dice orientato positivamente e e viene denotato con $\partial^+\Sigma$.

3.3 Integrazione su superfici

Esistono due tipi di integrali lungo una superficie $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

L'integrale di prima specie coinvolge l'integrale di una funzione scalare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Un esempio è il calcolo della carica disposta lungo una superficie, nota la densità superficiale di carica.

Definizione 3.11. *Data una superficie regolare $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e una funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$ definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^3$. Supponiamo che il sostegno di Φ sia contenuto in A, allora l'integrale di superficie di prima specie di f su Φ risulta*

$$\int_\Phi f\, dS := \int_\Omega f(\Phi(u,v)) \|(\Phi_u \times \Phi_v)(u,v)\|\, dudv\,.$$

Il caso $f \equiv 1$ restituisce l'area della superficie γ.

Supponiamo ora di voler calcolare lo stesso integrale usando una superficie equivalente $\Psi : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Allora dalla definizione, abbiamo l'esistenza di un C^1-diffeomorfismo $\varphi : \mathcal{O} \to \Omega$ tale che $\Psi(\alpha,\beta) = \Phi(\varphi(\alpha,\beta))$ per ogni $(\alpha,\beta) \in \mathcal{O}$. Notiamo che valgono le seguenti proprietà per le derivate parziali

$$\Psi_\alpha(\alpha,\beta) = J_\Phi(\varphi(\alpha,\beta))\varphi_\alpha(\alpha,\beta)\,, \qquad \Psi_\beta(\alpha,\beta) = J_\Phi(\varphi(\alpha,\beta))\varphi_\beta(\alpha,\beta)\,,$$

quindi, con una certa quantità di calcoli,

$$\Psi_\alpha \times \Psi_\beta(\alpha,\beta) = [\det J_\varphi(\alpha,\beta)]\ (\Phi_u \times \Phi_v)(\varphi(\alpha,\beta))\,.$$

Allora, dalla definizione precedente abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\Psi f\, dS &= \int_{\mathcal{O}} f(\Psi(\alpha,\beta)) \|(\Psi_\alpha \times \Psi_\beta)(\alpha,\beta)\|\, d\alpha d\beta \\ &= \int_{\mathcal{O}} f(\Phi(\varphi(\alpha,\beta)))|\det J_\varphi(\alpha,\beta)|\ \|(\Phi_u \times \Phi_v)(\varphi(\alpha,\beta))\|\, d\alpha d\beta \\ &= \int_\Omega f(\Phi(u,v))\|(\Phi_u \times \Phi_v)(u,v)\|\, dudv = \int_\Omega f\, dS\,.\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il teorema del cambio di variabili.

Abbiamo appena dimostrato che l'integrale di linea di prima specie è *invariante per superfici equivalenti.*

L'integrale di seconda specie coinvolge l'integrale di un campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Un esempio è il calcolo del flusso di un campo elettrico attraverso una superficie.

Definizione 3.12. *Data una superficie regolare $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e una funzione continua $F : A \to \mathbb{R}^3$ definita su un aperto $A \subset \mathbb{R}^3$. Supponiamo che il sostegno di Φ sia contenuto in A, allora l'integrale di superficie di seconda specie di F attraverso Φ risulta*

$$\int_\Phi F \cdot \hat{\nu}\, dS := \int_\Omega \left\langle F(\Phi(u,v))\,,\, \widehat{N}(u,v)\right\rangle\ \|(\Phi_u \times \Phi_v)(u,v)\|\, dudv = \int_\Omega \langle F(\Phi(u,v))\,,\, (\Phi_u \times \Phi_v)(u,v)\rangle\ dudv\,.$$

Supponiamo ora di voler calcolare lo stesso integrale usando una superficie equivalente $\Psi : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Allora dalla definizione, abbiamo l'esistenza di un C^1-diffeomorfismo $\varphi : \mathcal{O} \to \Omega$ tale che $\Psi(\alpha,\beta) = \Phi(\varphi(\alpha,\beta))$ per ogni $(\alpha,\beta) \in \mathcal{O}$. Allora, dalla definizione precedente abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\Psi F \cdot \hat{\nu}\, dS &= \int_{\mathcal{O}} \langle F(\Psi(\alpha,\beta))\,,\, (\Psi_\alpha \times \Phi_\beta)(\alpha,\beta)\rangle\ d\alpha d\beta \\ &= \int_{\mathcal{O}} \langle F(\Psi(\alpha,\beta))\,,\, [\det J_\varphi(\alpha,\beta)]\ (\Phi_u \times \Phi_v)(\varphi(\alpha,\beta))\rangle\ d\alpha d\beta \\ &= \int_{\mathcal{O}} \langle F(\Psi(\alpha,\beta))\,,\ (\Phi_u \times \Phi_v)(\varphi(\alpha,\beta))\rangle\ [\det J_\varphi(\alpha,\beta)] d\alpha d\beta\,.\end{aligned}$$

Se Ψ e Φ hanno la stessa orientazione, allora $\det J_\varphi > 0$ e concludiamo che

$$\int_\Psi F \cdot \hat{\nu}\, dS = \int_\Omega \langle F(\Phi(u,v)),\ (\Phi_u \times \Phi_v)(u,v)\rangle\, dudv = \int_\Phi F \cdot \widehat{N}\, dS\,.$$

Se invece Ψ e Φ hanno orientazione opposta, allora $\det J_\varphi < 0$ e concludiamo che

$$\int_\Psi F \cdot \hat{\nu}\, dS = -\int_\Omega \langle F(\Phi(u,v)),\ (\Phi_u \times \Phi_v)(u,v)\rangle\, dudv = -\int_\Phi F \cdot \widehat{N}\, dS\,.$$

Abbiamo appena dimostrato che l'integrale di superficie di seconda specie è *invariante per curve equivalenti con stessa orientazione.* Invece, in presenza di superfici equivalenti con orientazione opposta l'integrale ha segno opposto.

In presenza di una superficie ottenuta tramite incollamenti (si pensi ad esempio alla superficie che delimita un cubo), l'integrale su di essa sommando gli integrali calcolati su ogni singola superficie che costituisce l'incollamento.

4 I teoremi fondamentali per un fisico

4.1 Lavoro, potenziale e potenziale vettore

In questa prima parte risponderemo alla domanda: quando un campo irrotazionale è conservativo?

Definizione 4.1 (Insiemi semplicemente connessi)**.** *Un insieme $\mathcal{U}$ si dice semplicemente connesso se è connesso e soddisfa la seguente proprietà: ogni curva chiusa $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ con $\gamma(I) \subseteq \mathcal{U}$ può essere contratta in modo continuo ad un punto $P \in \mathcal{U}$, ovvero se esiste una funzione continua $H : [0,1] \times I \to \mathbb{R}^N$ tale che $H([0,1] \times I) \subseteq \mathcal{U}$, $H(0,t) = \gamma(t)$ e $H(1,t) = P$ per ogni $t \in I$.*

Esempio 4.2. *Sono insiemi semplicemente connessi: gli insiemi convessi, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $R^3 \setminus \{P\}$ o $\mathbb{R}^3 \setminus B$ dove B è una palla.*

Non sono insiemi semplicemente connessi: il toro, $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ o $\mathbb{R}^2 \setminus B$ dove B è una palla, $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$ dove ℓ è una retta.

Teorema 4.3. *Consideriamo un campo vettoriale $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, definito su un dominio $\mathcal{U}$ semplicemente connesso. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *il campo F è conservativo,*
2. *per ogni curva chiusa γ vale $\oint_\gamma F \cdot \hat{\tau}\, ds = 0$,*
3. *date due curve $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^N$ aventi gli stessi estremi, ovvero tali che $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ e $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$, allora $\int_{\gamma_1} F \cdot \hat{\tau}\, ds = \int_{\gamma_2} F \cdot \hat{\tau}\, ds$.*

Nota: con $\oint$ si denota l'integrale lungo una curva chiusa.
Per una dimostrazione si veda ad esempio: Adams, p. 333.

Teorema 4.4. *Consideriamo un campo vettoriale conservativo $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ con primitiva $\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Data una curva regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ tale che $\gamma(I) \subseteq \mathcal{U}$ allora*

$$\int_\gamma F \cdot \hat{\tau}\, ds = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))\,.$$

Per una dimostrazione si veda ad esempio: Pagani-Salsa p. 302.

Corollario 4.5 (La versione del fisico)**.** *Consideriamo un campo vettoriale conservativo $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con potenziale $U : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Data una curva regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ tale che $\gamma(I) \subseteq \mathcal{U}$ allora il lavoro del campo vettoriale lungo la curva γ è*

$$L = \int_\gamma F \cdot \hat{\tau}\, ds = U(\gamma(a)) - U(\gamma(b)) = -\Delta U\,.$$

Teorema 4.6. *Consideriamo un campo vettoriale $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, definito su un dominio $\mathcal{U}$ semplicemente connesso. Se F è irrotazionale allora è conservativo.*

In questa seconda parte risponderemo alla domanda: quando un campo indivergente ammette potenziale vettore?

Definizione 4.7 (Insieme fortemente connesso)**.** *Un insieme $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice fortemente connesso se è connesso e vale la seguente proprietà: per ogni superficie chiusa e regolare $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $\Sigma = \Phi(\Omega) \subseteq \mathcal{U}$, che è frontiera di un dominio tridimensionale D, si ha $D \subseteq \mathcal{U}$.*

Esempio 4.8. *Sono insiemi fortemente connessi: gli insiemi convessi, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$ dove ℓ è una retta.*

Non sono insiemi fortemente connessi: $R^3 \setminus \{P\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus B$ dove B è una palla, $\mathbb{R}^3 \setminus \ell$ dove ℓ è un segmento.

Teorema 4.9. *Consideriamo un campo vettoriale $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definito su un dominio $\mathcal{U}$ fortemente connesso. Se F è indivergente allora ammette potenziale vettore.*

4.2 Teorema della divergenza

Il teorema della divergenza afferma che il flusso uscente da una superficie chiusa (vista come frontiera di un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$) coincide con l'integrale della divergenza del campo nel volume D racchiuso dalla superficie.

In quanto segue si denoterà con $\Sigma = \partial^+ D$ la frontiera dell'insieme D in quanto si intenderà che verrà orientata positivamente secondo la convenzione introdotta per le superfici chiuse, ovvero del versore normale esterno.

Teorema 4.10 (Teorema della divergenza)**.** *Sia dato un campo vettoriale $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Consideriamo un dominio chiuso $D \subset \mathcal{U}$ avente come frontiera $\partial^+ D = \Sigma$ il sostegno di una superficie chiusa e orientata con un campo $\hat{\nu}$ uscente. Allora*

$$\iiint_D (\nabla \cdot F)(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{\partial^+ D} F \cdot \hat{\nu}\, dS\,.$$

Nel precedente teorema l'insieme $\Sigma = \partial^+ D$ può essere anche ottenuto tramite l'incollamento di più superfici (come ad esempio la superficie di un cubo). Anche in questo caso va considerato un campo $\hat{\nu}$ uscente.

La prossima affermazione ci dà un'idea del significato della divergenza di un campo. Si ottiene applicando il teorema della divergenza su una palla di raggio arbitrariamente piccolo.

Proposizione 4.11 (Il significato della divergenza)**.** *Dato un campo vettoriale $F : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la divergenza di F rappresenta la densità di flusso del campo uscente dal punto per unità di volume. Infatti, dato un punto P interno al dominio $\mathcal{U}$ e definita come S_ε la sfera di raggio ε centrata in P vale*

$$\nabla \cdot F(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \oint_{S_\varepsilon} F \cdot \hat{\nu}\, dS\,.$$

Si noti che nella precedente formula compare il valore $\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$: esso è il volume della palla di raggio ε e non l'area della superficie della sfera di raggio ε su cui calcoliamo l'integrale.

Abbiamo enunciato il teorema della divergenza in dimensione 3. Tuttavia esso vale in qualsiasi dimensione. Nel caso in dimensione 1 è interessante notare come il teorema diventi la formula di integrazione per parti. In dimensione 2 invece possiamo affermare quanto segue.

Teorema 4.12 (Teorema della divergenza nel piano)**.** *Sia dato un campo vettoriale $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Consideriamo un dominio chiuso $D \subset \mathbb{R}^2$ avente come bordo $\partial^+ D$ (orientato positivamente) il sostegno di una curva regolare a tratti chiusa e orientata con un campo di vettori normali $\hat{\nu}$ uscente. Allora*

$$\iint_D (\nabla \cdot F)(x, y)\, dxdy = \int_{\partial^+ D} F \cdot \hat{\nu}\, ds\,.$$

Nel precedente enunciato il versore $\hat{\nu}$ si ottiene ruotando di novanta gradi in senso orario il vettore tangente $\hat{\tau}$ (ricordando che il bordo va orientato positivamente):

$$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \hat{\tau}\,.$$

Enunciamo altre due conseguenza del teorema della divergenza. Si noti che i prossimi enunciati coinvolgono integrali di funzioni a valori vettoriali in $\mathbb{R}^3$, quindi sono da intendersi componente per componente.

Teorema 4.13. *Nelle ipotesi del teorema della divergenza, vale*

$$\iiint_D \nabla \times F \, dxdydz = -\iint_{\partial^+ D} F \times \hat{\nu} \, dS \, .$$

Dimostrazione. Consideriamo un generico vettore $v \in \mathbb{R}^3$, abbiamo le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (F \times v) &= (\nabla \times F) \cdot v - F \cdot \cancel{(\nabla \times v)} = (\nabla \times F) \cdot v \, , \\ (F \times v) \cdot \hat{\nu} &= (\hat{\nu} \times F) \cdot v = -(F \times \hat{\nu}) \cdot v \, . \end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che definiti i vettori

$$I_1 = \iiint_D \nabla \times F \, dxdydz \, , \qquad I_2 = -\iint_{\partial^+ D} F \times \hat{\nu} \, dS \, ,$$

allora vale $I_1 = I_2$. Per fare ciò dimostreremo che per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ vale $I_1 \cdot v = I_2 \cdot v$. L'idea è quella di applicare il teorema della divergenza al campo $F \times v$, usando le precedenti identità.

$$\begin{aligned} I_1 \cdot v &= \left(\iiint_D \nabla \times F \, dxdydz \right) \cdot v = \iiint_D (\nabla \times F) \cdot v \, dxdydz = \iiint_D \nabla \cdot (F \times v) \, dxdydz \\ &= \iint_{\partial^+ D} (F \times v) \cdot \hat{\nu} \, dS = -\iint_{\partial^+ D} (F \times \hat{\nu}) \cdot v \, dS = \left(-\iint_{\partial^+ D} F \times \hat{\nu} \, dS \right) \cdot v = I_2 \cdot v \, . \end{aligned}$$

□

Teorema 4.14. *Sia data una funzione $\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Consideriamo un dominio chiuso $D \subset \mathcal{U}$ avente come bordo $\partial^+ D = S$ una superficie chiusa e orientata con un campo $\hat{\nu}$ uscente. Allora*

$$\iiint_D \nabla \phi \, dxdydz = \iint_{\partial^+ D} \phi \hat{\nu} \, dS \, .$$

Dimostrazione. La dimostrazione utilizza la precedente idea. Questa volta applicando il teorema della divergenza al campo $\phi \, v$ dove $v \in \mathbb{R}^3$. Dapprima calcoliamo le identità

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi v) &= \nabla \phi \cdot v + \phi \cancel{(\nabla \cdot v)} = \nabla \phi \cdot v \, , \\ (\phi v) \cdot \hat{\nu} &= \phi \hat{\nu} \cdot c \, . \end{aligned}$$

Quindi, come in precedenza, definiamo i vettori

$$I_1 = \iiint_D \nabla \phi \, dxdydz \, , \qquad I_2 = \iint_{\partial^+ D} \phi \hat{\nu} \, dS \, ,$$

da cui calcoliamo

$$\begin{aligned} I_1 \cdot v &= \left(\iiint_D \nabla \phi \, dxdydz \right) \cdot v = \iiint_D \nabla \phi \cdot v \, dxdydz = \iiint_D \nabla \cdot (\phi \, v) \, dxdydz \\ &= \iint_{\partial^+ D} (\phi \, v) \cdot \hat{\nu} \, dS = \iint_{\partial^+ D} \phi \, \hat{\nu} \cdot v \, dS = \left(\iint_{\partial^+ D} \phi \hat{\nu} \, dS \right) \cdot v = I_2 \cdot v \, . \end{aligned}$$

□

4.3 Il teorema del rotore

Il teorema del rotore invece afferma che il flusso del rotore di una campo vettoriale attraverso una superficie coincide con la circuitazione del campo lungo la curva (orientata positivamente) che costituisce il bordo della superficie.

Teorema 4.15 (Teorema del rotore)**.** *Sia dato un campo vettoriale $F : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Consideriamo una superficie regolare $\Sigma \subset \mathcal{U}$ orientata con un campo di versori normali $\hat{\nu}$. Orientiamo positivamente il suo bordo $\partial^+ \Sigma$ e supponiamo che esso sia il sostegno di una curva regolare (a tratti) chiusa. Allora*

$$\iint_\Sigma (\nabla \times F) \cdot \hat{\nu} \, dS = \oint_{\partial^+ \Sigma} F \cdot \hat{\tau} \, ds \, .$$

La prossima affermazione ci dà un'idea del significato del rotore di un campo. Si ottiene applicando il teorema del rotore su un disco di raggio arbitrariamente piccolo.

Proposizione 4.16 (Il significato del rotore)**.** *Dato un campo vettoriale $F : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e un punto P interno al dominio $\mathcal{U}$, consideriamo un disco $D_\varepsilon(\nu)$ (un cerchio nello spazio) di centro P, raggio ε e avente vettore normale $\hat{\nu}$. Abbiamo*

$$[\nabla \times F(P)] \cdot \hat{\nu} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \oint_{\partial^+ D_\varepsilon(\nu)} F \cdot \hat{\tau} \, ds \, .$$

Si noti che nella precedente formula compare il valore $\pi\varepsilon^2$: esso è la superficie del disco di raggio ε e non la circonferenza di raggio ε su cui si calcola l'integrale.

Anche per il teorema del rotore esiste la versione bidimensionale. In questo caso si tratta di riscrivere il teorema interpretando la superficie Σ come un dominio di $\mathbb{R}^2$: più precisamente è come se stessimo considerando il caso particolare di una superficie come nell'Esempio 3.5 con funzione $g(u, v) = 0$ costantemente nulla per la quale troveremmo $\hat{\nu} = (0, 0, 1)$. Per quanto riguarda il campo vettoriale, se consideriamo un campo $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con componente F_3 costantemente nulla e tale che F_1 ed F_2 non dipendono dalla componente z allora troviamo $\nabla \times F = (0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$. In questo caso, dato che $F_3 \equiv 0$, possiamo interpretare F come un campo planare $F = (F_1, F_2) : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e scrivere il seguente risultato.

Teorema 4.17 (Formula di Gauss-Green)**.** *Dato un campo vettoriale $F = (F_1, F_2) : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e un dominio chiuso $D \subset \mathcal{U}$ allora vale*

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\partial^+ D} F \cdot \hat{\tau} \, ds \, .$$

Dalla formula di Gauss-Green, come applicazione segue un metodo per il calcolo dell'area di un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$. Consideriamo una regione di spazio D la cui frontiera $\partial^+ D$ è il sostegno di curva chiusa regolare a tratti $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, che la *percorre* in senso antiorario. I tre campi vettoriali $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiti come

$$F_1(x, y) = (0, x) \, , \qquad F_2(x, y) = (-y, 0) \, , \qquad F_3(x, y) = \tfrac{1}{2}(-y, x) \, ,$$

sono tali che $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$. Quindi dalla formula di Gauss-Green applicata ai tre campi precedenti otteniamo le seguenti identità

$$\begin{aligned} |D| = \iint_D 1 \, dxdy &= \oint_{\partial^+ D} x(t) y'(t) \, dt \\ &= - \oint_{\partial^+ D} y(t) x'(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\partial^+ D} \big(x(t) y'(t) - y(t) x'(t) \big) \, dt \end{aligned}$$