

# INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

## PRIMA PARTE

### 1 Integrale di Riemann

Vedremo la definizione di integrale di Riemann per funzioni con dominio contenuto in  $\mathbb{R}^2$ , successivamente daremo alcuni indizi su come estendere tale definizione a funzioni definite su sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$ , decisamente utili dal punto di vista fisico. A quel punto, come esercizio, è possibile rileggere tutta la parte precedente immaginando di riscriverla in questo contesto. Un'ulteriore estensione a funzioni con domini contenuti in  $\mathbb{R}^N$  con  $N$  intero generico può essere effettuata analogamente.

Inoltre potremo notare come le definizioni ricalcano il procedimento adottato nel corso di Analisi Matematica I per introdurre gli integrali per funzioni con dominio contenuto in  $\mathbb{R}$ .

Introduciamo ora alcune definizioni che saranno utilizzate sistematicamente in quanto segue.

Cominceremo dapprima a considerare funzioni limitate  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  definite su rettangoli limitati

$$Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

Ricordiamo, che una funzione si dice limitata se esistono due costanti reali  $m, M \in \mathbb{R}$  tali che

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad \text{per ogni } (x, y) \in Q.$$

Consideriamo due partizioni, rispettivamente di  $[a, b]$  e  $[c, d]$ , come già viste nel corso di Analisi Matematica I,

$$D_1 := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_r\}, \quad D_2 := \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_s\},$$

dove

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_r = b, \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_s = d.$$

Diremo **partizione** di  $Q$  un insieme  $D = D_1 \times D_2$  dove  $D_1$  e  $D_2$  sono partizioni, rispettivamente di  $[a, b]$  e  $[c, d]$  definite come sopra. Definiremo gli intervalli

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad J_h = [y_{h-1}, y_h],$$

dove  $k = 1, \dots, r$  e  $h = 1, \dots, s$ , aventi rispettivamente ampiezza

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_h = y_h - y_{h-1}.$$

A questo punto il rettangolo  $Q$  viene spezzettato "come un puzzle" in  $r \cdot s$  rettangolini  $Q_{kh} = I_k \times J_h$  di area  $A_{kh} = \Delta x_k \cdot \Delta y_h$ .

In ogni rettangolino  $Q_{kh}$  possiamo considerare estremo inferiore e superiore che denotiamo con

$$m_{kh} = \inf_{(x,y) \in Q_{kh}} f(x, y), \quad M_{kh} = \sup_{(x,y) \in Q_{kh}} f(x, y).$$

Definiamo ora le somme inferiori e superiori.

**Definizione 1.1.** Si dice somma inferiore di Riemann della funzione  $f$  rispetto alla partizione  $D$  il valore

$$s(D, f) = \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s m_{kh} \Delta x_k \Delta y_h.$$

Si dice somma superiore di Riemann della funzione  $f$  rispetto alla partizione  $D$  il valore

$$S(D, f) = \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s M_{kh} \Delta x_k \Delta y_h.$$

Poiché vale

$$m \leq m_{kh} \leq M_{kh} \leq M, \quad \text{per ogni } k, h \quad (1)$$

troviamo

$$m \cdot \text{Area}(Q) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq M \cdot \text{Area}(Q).$$

**Definizione 1.2.** Dato un rettangolo  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , date due partizioni di  $Q$ ,  $D = D_1 \times D_2$  e  $\tilde{D} = \tilde{D}_1 \times \tilde{D}_2$ , diremo che  $\tilde{D}$  è più fine di  $D$  se  $D_1 \subseteq \tilde{D}_1$  e  $D_2 \subseteq \tilde{D}_2$ .

**Proposizione 1.3.** Data  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata, siano  $D$  e  $\tilde{D}$  due partizioni di  $Q$ . Se  $\tilde{D}$  è più fine di  $D$  allora

$$s(D, f) \leq s(\tilde{D}, f) \leq S(\tilde{D}, f) \leq S(D, f).$$

*Dimostrazione.* La tesi si ottiene notando che ogni rettangolo  $Q_{kh}$  individuato dalla partizione  $D$ , è suddiviso in ulteriori rettangolini più piccoli della partizione  $\tilde{D}$ , che denoteremo con  $\tilde{Q}_{\lambda\mu}$ . Ragionando come in (1) possiamo notare che

$$m_{kh} \leq \tilde{m}_{\lambda\mu} \leq \tilde{M}_{\lambda\mu} \leq M_{kh}, \quad \text{per ogni } \lambda, \mu \text{ tali che } \tilde{Q}_{\lambda\mu} \subseteq Q_{kh},$$

dove

$$\tilde{m}_{\lambda\mu} = \inf_{(x,y) \in \tilde{Q}_{\lambda\mu}} f(x, y), \quad \tilde{M}_{\lambda\mu} = \sup_{(x,y) \in \tilde{Q}_{\lambda\mu}} f(x, y).$$

Quindi possiamo notare che

$$m_{kh} A_{kh} = m_{kh} \sum_{\diamond} \tilde{A}_{\lambda\mu} \leq \sum_{\diamond} \tilde{m}_{\lambda\mu} \tilde{A}_{\lambda\mu} \leq \sum_{\diamond} \tilde{M}_{\lambda\mu} \tilde{A}_{\lambda\mu} \leq M_{kh} \sum_{\diamond} \tilde{A}_{\lambda\mu} = M_{kh} A_{kh}.$$

dove  $\tilde{A}_{\lambda\mu}$  è l'area del rettangolino  $\tilde{Q}_{\lambda\mu}$ , e  $\sum_{\diamond}$  indica che stiamo sommando sugli indici  $\lambda, \mu$  tali che  $\tilde{Q}_{\lambda\mu} \subseteq Q_{kh}$ .

Dalle disuguaglianze precedenti possiamo ricavare quindi la tesi.  $\square$

**Proposizione 1.4.** Date due partizioni  $D$  e  $\tilde{D}$  di  $Q$  esiste una partizione  $\hat{D}$  più fine di entrambe.

*Dimostrazione.* Basta prendere  $\hat{D} = \hat{D}_1 \times \hat{D}_2$  dove  $\hat{D}_1 = D_1 \cup \tilde{D}_1$  e  $\hat{D}_2 = D_2 \cup \tilde{D}_2$ .  $\square$

**Definizione 1.5.** Dato un rettangolo  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  e una funzione  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata, diremo integrale inferiore di Riemann della funzione  $f$  su  $Q$

$$\underline{I}(f, Q) = \sup_D s(D, f)$$

e integrale superiore di Riemann della funzione  $f$  su  $Q$

$$\overline{I}(f, Q) = \inf_D S(D, f).$$

**Esercizio 1.6.** Mostrare che vale  $m \cdot \text{Area}(Q) \leq \underline{I}(f, Q) \leq \overline{I}(f, Q) \leq M \cdot \text{Area}(Q)$ .

**Definizione 1.7.** Dato un rettangolo  $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  e una funzione  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata, essa si dice integrabile secondo Riemann su  $Q$  se vale

$$\underline{I}(f, Q) = \overline{I}(f, Q).$$

Tale valore è detto **integrale di Riemann di  $f$  su  $Q$** . L'insieme  $Q$  è detto dominio di integrazione, mentre  $f$  è detta funzione integranda.

Per denotare l'integrale di Riemann spesso vengono usate le seguenti notazioni:

$$I(f, Q), \quad \int_Q f, \quad \iint_Q f, \quad \iint_Q f(x, y) dx dy.$$

In quanto segue denoteremo con  $\mathcal{R}(Q)$  l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann su  $Q$ :

$$\mathcal{R}(Q) = \{f : Q \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è integrabile secondo Riemann su } Q\},$$

Si noti che, chiedendo nella Definizione 1.7, come ipotesi la limitatezza di  $f$ , abbiamo che ogniqualvolta chiederemo  $f \in \mathcal{R}(Q)$  sottintenderemo che  $f$  è limitata.

**Esempio 1.8.** Le funzioni costanti sono integrabili secondo Riemann su ogni rettangolo. In particolare, se  $f(x, y) = c$  per ogni  $(x, y) \in Q$  allora vale

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = c \cdot \text{Area}(Q).$$

**Esempio 1.9** ( ! Importante ! ). Sia  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x, y) = g(x)$  dove la funzione  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$ , ovvero  $g \in \mathcal{R}([a, b])$ , allora  $f \in \mathcal{R}(Q)$ .

Infatti, prendendo una generica partizione  $D = D_1 \times D_2$ , abbiamo

$$\begin{aligned} s(D, f) &= \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s m_{kh} \Delta x_k \Delta y_h \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s \inf_{x \in I_k} g(x) \Delta x_k \Delta y_h \\ &= \sum_{k=1}^r \inf_{x \in I_k} g(x) \Delta x_k (d - c) \\ &= s(D_1, g)(d - c) \end{aligned}$$

e similmente

$$\begin{aligned} S(D, f) &= \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s M_{kh} \Delta x_k \Delta y_h \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s \sup_{x \in I_k} g(x) \Delta x_k \Delta y_h \\ &= \sum_{k=1}^r \sup_{x \in I_k} g(x) \Delta x_k (d - c) \\ &= S(D_1, g)(d - c). \end{aligned}$$

Da ciò possiamo concludere che

$$\sup_D s(D, f) \stackrel{!}{=} \sup_{D_1} s(D_1, g)(d - c) = \inf_{D_1} S(D_1, g)(d - c) \stackrel{!}{=} \inf_D S(D, f) \quad (2)$$

dove l'uguaglianza al centro discende dall'ipotesi  $g \in \mathcal{R}([a, b])$ .

Le uguaglianze con il "!" nascondono delle finezze di non poco conto e non sono brevi da dimostrare. Per la prima, ad esempio, dobbiamo mostrare che valgono entrambe le disuguaglianze

$$\sup_D s(D, f) \leq \sup_{D_1} s(D_1, g)(d - c) \quad e \quad \sup_D s(D, f) \geq \sup_{D_1} s(D_1, g)(d - c).$$

Abbiamo mostrato che, per ogni partizione  $D = D_1 \times D_2$  del rettangolo  $Q$ , vale

$$s(D, f) = s(D_1, g)(d - c).$$

In particolare, fissata una generica partizione  $D$  di  $Q$ , possiamo ottenere la seguente maggiorazione indipendente dalla scelta di  $D$ :

$$s(D, f) = s(D_1, g)(d - c) \leq \sup_{\tilde{D}_1} s(\tilde{D}_1, g)(d - c)$$

dove abbiamo calcolato l'estremo superiore su tutte le possibili partizioni  $\tilde{D}_1$  dell'intervallo  $[a, b]$ . A questo punto, segue che l'estremo superiore al variare di tutte le partizioni  $D$  di  $Q$  soddisfa

$$\sup_D s(D, f) \leq \sup_{\tilde{D}_1} s(\tilde{D}_1, g)(d - c)$$

essendo il membro destro un maggiorante dell'insieme  $\{s(D, f) \mid D \text{ è partizione di } Q\}$ . Quindi vale la prima disuguaglianza.

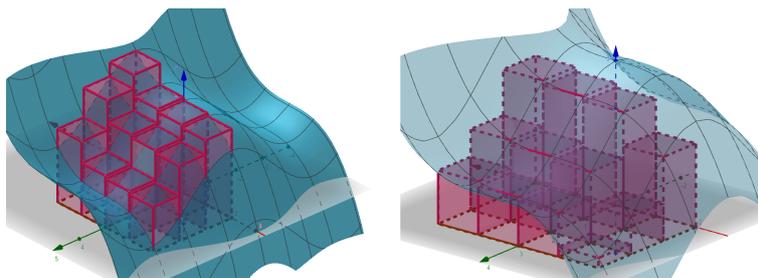


Figura 1: Somme superiori e somme inferiori.

Per dimostrare la seconda, ragioniamo specularmente. Fissiamo una generica partizione  $D_1$  dell'intervallo  $[a, b]$  e scriviamo la maggiorazione

$$s(D_1, g)(d - c) = s(D, f) \leq \sup_{\tilde{D}} s(\tilde{D}, f),$$

dove abbiamo calcolato l'estremo superiore su tutte le possibili partizioni  $\tilde{D}$  di  $Q$ . La maggiorazione precedente vale per ogni scelta della partizione  $D_1$ , quindi possiamo calcolare l'estremo superiore al variare di tutte le possibili partizioni  $D_1$  dell'intervallo  $[a, b]$  e trovare

$$\sup_{D_1} s(D_1, g)(d - c) \leq \sup_{\tilde{D}} s(\tilde{D}, f),$$

concludendo la dimostrazione. Per esercizio scrivere la dimostrazione del "!" in (2) che coinvolge le somme superiori sulla falsariga di quanto sopra.

**Esempio 1.10.** Ricordiamo che la seguente funzione non è integrabile secondo Riemann

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Analogamente abbiamo che la seguente funzione non è integrabile secondo Riemann

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diamo ora un'interpretazione grafica della nozione di integrale. Consideriamo quindi una funzione  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}(Q)$  tale che  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in Q$  e definiamo l'insieme

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x, y)\}, \quad (3)$$

ovvero la regione di spazio sotto il grafico di  $f$ . Notiamo quindi che, data una partizione  $D$  di  $Q$ , la somma inferiore  $s(D, f)$  è il volume di una regione costituita da parallelepipedi contenuta in  $T$ , mentre la somma superiore  $S(D, f)$  è il volume di una regione costituita da parallelepipedi contenenti  $T$ . Quindi è ragionevole concludere che l'integrale di  $f$  su  $Q$  è il valore del volume di  $T$ .

**Proposizione 1.11.** Dato un rettangolo  $Q \subset \mathbb{R}^2$  e una funzione  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. La funzione è integrabile secondo Riemann su  $Q$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione  $D_\varepsilon$  di  $Q$  tale che  $S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) < \varepsilon$ .

La dimostrazione è lasciata per esercizio, si può ottenere seguendo la dimostrazione dell'enunciato analogo già visto nel corso precedente.

**Definizione 1.12.** Definiamo, dato un sottoinsieme  $E \subset \mathbb{R}^2$ , il diametro di  $E$  come

$$\text{diam}(E) = \sup \{\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \mid (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E\}.$$

Nel caso particolare di un rettangolo  $Q$  il valore del diametro è la lunghezza della diagonale, per un cerchio invece abbiamo la lunghezza appunto del diametro.

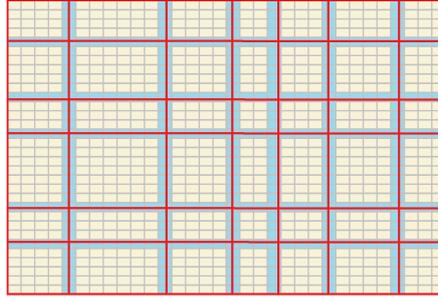


Figura 2: La costruzione delle due partizioni, in rosso la griglia individuata da  $D$ , in grigio quella individuata da  $\widehat{D}$ .

**Definizione 1.13.** Dato  $Q \subset \mathbb{R}^2$  e una sua partizione  $D$ , diremo **ampiezza della partizione**  $D$  il numero

$$|D| = \max_{k,h} \text{diam}(Q_{kh}).$$

**Teorema 1.14.** La funzione limitata  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile secondo Riemann su  $Q$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni partizione  $D$  di  $Q$  di ampiezza  $|D| < \delta$  vale  $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$ .

Questo teorema è importante perché ci dice che, in presenza di una funzione integrabile, è sufficiente raffinare adeguatamente la partizione al fine di trovare una buona approssimazione dell'integrale.

*Dimostrazione.* Innanzitutto mostriamo che esistono partizioni di ampiezza piccola a piacere. Dato  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , per ogni  $N \in \mathbb{N}$ , definiamo le partizioni

$$D_1(N) = \left\{ x_k = a + \frac{b-a}{N} k \mid k = 0, \dots, N \right\}, \quad D_2(N) = \left\{ y_k = c + \frac{d-c}{N} k \mid k = 0, \dots, N \right\}$$

con  $\Delta x_k = \frac{b-a}{N}$  e  $\Delta y_k = \frac{d-c}{N}$ . Definiamo quindi  $D(N) = D_1(N) \times D_2(N)$  e notiamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  possiamo trovare  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $|D(N)| < \delta$ , infatti

$$|D(N)| = \frac{1}{N} \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}.$$

*Implicazione " $\Leftarrow$ ".* Per ipotesi sappiamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  con le proprietà richieste. Avendo appena mostrato che possiamo trovare una partizione  $D$  di ampiezza  $|D(N)| < \delta$  concludiamo questa parte della dimostrazione applicando la Proposizione 1.11 ponendo  $D_\varepsilon = D(N)$ .

*Implicazione " $\Rightarrow$ ".* Poiché  $f \in \mathcal{R}(Q)$ , dalla Proposizione 1.11 troviamo una partizione  $D$  di  $Q$  tale che

$$S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon/2. \quad (4)$$

Supponiamo  $D = D_1 \times D_2$  dove  $D_1 = \{x_0, \dots, x_r\}$  e  $D_2 = \{y_0, \dots, y_s\}$ . Consideriamo i segmenti, rispettivamente, verticali e orizzontali

$$\{x_i\} \times [c, d], \quad i = 1, \dots, r-1; \quad [a, b] \times \{y_j\}, \quad j = 1, \dots, s-1. \quad (5)$$

Tutti questi segmenti hanno assieme una lunghezza totale

$$L = (d-c)(r-1) + (b-a)(s-1).$$

Definiamo ora  $\delta > 0$  tale che

$$(M-m)L\delta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (6)$$

dove ricordiamo che  $M = \sup_Q f$  e  $m = \inf_Q f$ . Mostriamo ora che questa scelta di  $\delta$  permette di giungere alla tesi.

Consideriamo quindi una partizione  $\widehat{D} = \widehat{D}_1 \times \widehat{D}_2$  tale che  $|\widehat{D}| < \delta$  e, con notazioni usuali, scriviamo

$$\widehat{D}_1 = \{\widehat{x}_0, \dots, \widehat{x}_r\}, \quad \widehat{D}_2 = \{\widehat{y}_0, \dots, \widehat{y}_s\}$$

dove per  $\lambda \in \{1, \dots, \widehat{r}\}$  e  $\mu \in \{1, \dots, \widehat{s}\}$  vale necessariamente

$$\max_{\lambda} \Delta \widehat{x}_{\lambda} < \delta, \quad \max_{\mu} \Delta \widehat{y}_{\mu} < \delta.$$

Inoltre dalla definizione di somme superiori e inferiori

$$S(\widehat{D}, f) - s(\widehat{D}, f) = \sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}} (\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu}. \quad (7)$$

dove  $\widehat{M}_{\lambda\mu} = \sup_{\widehat{Q}_{\lambda\mu}} f$ ,  $\widehat{m}_{\lambda\mu} = \inf_{\widehat{Q}_{\lambda\mu}} f$  e  $\widehat{A}_{\lambda\mu} = \Delta \widehat{x}_{\lambda} \cdot \Delta \widehat{y}_{\mu}$ . Dalla (4) abbiamo

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq S(D, f) - s(D, f) = \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s (M_{kh} - m_{kh}) A_{kh}. \quad (8)$$

A questo punto possiamo dividere i rettangolini  $\widehat{Q}_{\lambda\mu}$  in due gruppi.

1° gruppo. Consideriamo gli indici  $\lambda, \mu$  per cui  $\widehat{Q}_{\lambda\mu} \subseteq Q_{kh}$  per degli indici  $k, h$ . Ovvero i rettangolini della partizione *fitta*  $\widehat{D}$  che sono contenuti totalmente in uno dei rettangoli della partizione  $D$ . Per questi valori vale

$$m_{kh} \leq \widehat{m}_{\lambda\mu} \leq \widehat{M}_{\lambda\mu} \leq M_{kh},$$

quindi vale

$$(\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu} \leq (M_{kh} - m_{kh}) \widehat{A}_{\lambda\mu}. \quad (9)$$

2° gruppo. I rimanenti indici corrispondono a rettangoli  $\widehat{Q}_{\lambda\mu}$  che si trovano a cavallo dei segmenti introdotti in (5). Per questi utilizzeremo la magiorazione "brutale" sul rettangolo  $Q$ :

$$(\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu} \leq (M - m) \widehat{A}_{\lambda\mu}. \quad (10)$$

Spezziamo quindi la sommatoria (7) sui due gruppi

$$\begin{aligned} S(\widehat{D}, f) - s(\widehat{D}, f) &= \sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}} (\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu} \\ &= \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}} (\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu}}_{1^\circ \text{ gruppo.}} + \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}} (\widehat{M}_{\lambda\mu} - \widehat{m}_{\lambda\mu}) \widehat{A}_{\lambda\mu}}_{2^\circ \text{ gruppo.}} \\ &\leq \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}} (M_{kh} - m_{kh}) \widehat{A}_{\lambda\mu}}_{1^\circ \text{ gruppo.}} + \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}} (M - m) \widehat{A}_{\lambda\mu}}_{2^\circ \text{ gruppo.}} \quad ! (9) \text{ e } (10) ! \\ &\leq \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s (M_{kh} - m_{kh}) A_{kh} + (M - m) \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\widehat{r}} \sum_{\mu=1}^{\widehat{s}} \widehat{A}_{\lambda\mu}}_{2^\circ \text{ gruppo.}} \\ &\leq S(D, f) - s(D, f) + (M - m)L\delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad ! (4) \text{ e } (6) ! \end{aligned}$$

concludendo la dimostrazione.  $\square$

Abbiamo dato una definizione di integrale tramite la quale scegliamo di contare nelle somme superiori e inferiori rispettivamente l'estremo superiore e inferiore della funzione in ogni rettangolino. Un approccio simile è dato dalle somme alla Cauchy che vediamo qui di seguito.

**Definizione 1.15** (Somme alla Cauchy). Sia  $Q \subset \mathbb{R}^2$  e una sua partizione  $D$ . Consideriamo una funzione di scelta

$$\mathcal{S} : \{Q_{kh} \mid k = 1, \dots, r, h = 1, \dots, s\} \rightarrow Q$$

dove  $\mathcal{S}(Q_{kh}) = (x^{kh}, y^{kh}) \in Q_{kh}$ .

Definiamo quindi

$$\sigma(D, \mathcal{S}, f) = \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s f(x^{kh}, y^{kh}) \Delta x_k \Delta y_h,$$

come la somma alla Cauchy associata alla funzione  $f$  data la partizione  $D$  con funzione di scelta  $\mathcal{S}$ .

Sostanzialmente la funzione  $\mathcal{S}$  nella precedente definizione sceglie per ogni rettangolino  $Q_{kh}$  un suo punto generico, dove andare a valutare la funzione  $f$ . Nel caso  $f$  fosse una funzione continua, le somme inferiori (o superiori) sarebbero ottenute come *somme alla Cauchy* con la funzione  $\mathcal{S}$  che sceglie il punto di minimo (o di massimo) su ogni rettangolino.

**Teorema 1.16.** Data  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e il valore  $I \in \mathbb{R}$ , la funzione  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $Q$  e vale  $\int_Q f = I$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che per ogni partizione  $D$  di  $Q$ , con ampiezza  $|D| < \delta$ , e per ogni funzione di scelta  $\mathcal{S}$  vale  $|\sigma(D, \mathcal{S}, f) - I| < \varepsilon$ .

Il precedente teorema è molto importante perché ci garantisce che possiamo approssimare il valore dell'integrale *scegliendo a caso* il punto in cui valutare la funzione su ogni rettangolino della partizione senza curarci di trovare in ognuno di essi l'estremo inferiore e superiore della funzione, purché abbiamo scelto una partizione con ampiezza sufficientemente piccola.

Nella dimostrazione, l'implicazione " $\Leftarrow$ " sarà resa più complicata dal fatto che non chiedendo nulla più che la limitatezza di  $f$  dovremo ragionare con le proprietà di estremo inferiore e superiore costruendo una successione di punti dei rettangolini le cui immagini tendono agli estremi inferiori e superiori. Infatti la funzione  $f$  non ammette necessariamente minimo e massimo sui rettangolini  $Q_{kh}$ .

*Dimostrazione.* Notiamo innanzitutto che per ogni partizione  $D$  di  $Q$  e per ogni funzione di scelta  $\mathcal{S}$  vale

$$m_{kh} \leq f(x^{kh}, y^{kh}) \leq M_{kh}, \forall k, h \quad \Rightarrow \quad s(D, f) \leq \sigma(D, \mathcal{S}, f) \leq S(D, f). \quad (11)$$

*Implicazione " $\Rightarrow$ ".* Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che per ogni partizione  $D$  di  $Q$ , con ampiezza  $|D| < \delta$ , vale

$$s(D, f) \leq I \leq S(D, f) < s(D, f) + \varepsilon,$$

quindi usando la (11) troviamo che vale anche

$$s(D, f) \leq \sigma(D, \mathcal{S}, f) < S(D, f) \leq s(D, f) + \varepsilon,$$

per ogni funzione di scelta  $\mathcal{S}$ , da cui  $|\sigma(D, \mathcal{S}, f) - I| < \varepsilon$  segue facilmente.

*Implicazione " $\Leftarrow$ ".* Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e una partizione  $D$  come nelle ipotesi. Sia  $A$  l'area del rettangolo  $Q$ . Costruiamo due funzioni di scelta

$$\widehat{\mathcal{S}} : \{Q_{kh}\} \rightarrow Q, \quad \widehat{\mathcal{S}}(Q_{kh}) = (\widehat{x}^{kh}, \widehat{y}^{kh}) \text{ tale che } f(\widehat{x}^{kh}, \widehat{y}^{kh}) > M_{kh} - \frac{\varepsilon}{A}, \quad \forall k, h,$$

$$\widetilde{\mathcal{S}} : \{Q_{kh}\} \rightarrow Q, \quad \widetilde{\mathcal{S}}(Q_{kh}) = (\widetilde{x}^{kh}, \widetilde{y}^{kh}) \text{ tale che } f(\widetilde{x}^{kh}, \widetilde{y}^{kh}) < m_{kh} + \frac{\varepsilon}{A}, \quad \forall k, h,$$

cosicché valgono

$$\begin{aligned} \sigma(D, \widehat{\mathcal{S}}, f) &= \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s f(\widehat{x}^{kh}, \widehat{y}^{kh}) \Delta x_k \Delta y_h \\ &> \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s \left( M_{kh} - \frac{\varepsilon}{A} \right) \Delta x_k \Delta y_h \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s M_{kh} \Delta x_k \Delta y_h - \frac{\varepsilon}{A} \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s \Delta x_k \Delta y_h \\ &= S(D, f) - \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(D, \tilde{\mathcal{S}}, f) &= \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s f(\tilde{x}^{kh}, \tilde{y}^{kh}) \Delta x_k \Delta y_h \\
&< \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s \left( m_{kh} + \frac{\varepsilon}{A} \right) \Delta x_k \Delta y_h \\
&= \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s m_{kh} \Delta x_k \Delta y_h + \frac{\varepsilon}{A} \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s \Delta x_k \Delta y_h \\
&= s(D, f) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
S(D, f) - s(D, f) &< \sigma(D, \hat{\mathcal{S}}, f) - \sigma(D, \tilde{\mathcal{S}}, f) + 2\varepsilon \\
&\leq |\sigma(D, \hat{\mathcal{S}}, f) - \sigma(D, \tilde{\mathcal{S}}, f)| + 2\varepsilon \\
&\leq |\sigma(D, \hat{\mathcal{S}}, f) - I| + |\sigma(D, \tilde{\mathcal{S}}, f) - I| + 2\varepsilon < 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dal fatto che

$$S(D, f) - s(D, f) < 4\varepsilon, \quad (12)$$

utilizzando la Proposizione 1.11, abbiamo  $f \in \mathcal{R}(Q)$ .

Resta da dimostrare che il valore dell'integrale è proprio  $I$ . Essendo  $f \in \mathcal{R}(Q)$  vale

$$s(D, f) \leq \int_Q f \leq S(D, f),$$

mentre da (11) e (12) segue che

$$s(D, f) \leq \sigma(D, \hat{\mathcal{S}}, f) \leq S(D, f) < s(D, f) + 4\varepsilon.$$

Quindi  $|\sigma(D, \hat{\mathcal{S}}, f) - \int_Q f| < 4\varepsilon$ , da cui

$$\left| \int_Q f - I \right| \leq \left| \int_Q f - \sigma(D, \hat{\mathcal{S}}, f) \right| + |\sigma(D, \hat{\mathcal{S}}, f) - I| < 4\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon,$$

terminando così la dimostrazione. □

**Teorema 1.17.** *Sia  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  continua allora  $f \in \mathcal{R}(Q)$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $Q$  è un compatto e  $f$  è continua allora per il teorema di Weierstrass la funzione è limitata. Inoltre è anche uniformemente continua, quindi per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Q$  con  $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta$  vale  $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$ .

Prendiamo una qualsiasi partizione  $D$  di  $Q$  con ampiezza  $|D| < \delta$ . In ogni rettangolino  $Q_{kh}$  possiamo individuare almeno un punto di minimo  $(x_1^{kh}, y_1^{kh})$  e almeno un punto di massimo  $(x_2^{kh}, y_2^{kh})$ , ovvero

$$m_{kh} = \min_{(x,y) \in Q_{kh}} f(x, y) = f(x_1^{kh}, y_1^{kh}), \quad M_{kh} = \max_{(x,y) \in Q_{kh}} f(x, y) = f(x_2^{kh}, y_2^{kh}), \quad \forall k, h.$$

Avendo preso la partizione sufficientemente fine, usando l'uniforme continuità troviamo che

$$\|(x_1^{kh}, y_1^{kh}) - (x_2^{kh}, y_2^{kh})\| < \delta \quad \Rightarrow \quad M_{kh} - m_{kh} = |f(x_2^{kh}, y_2^{kh}) - f(x_1^{kh}, y_1^{kh})| < \varepsilon.$$

Quindi possiamo concludere che

$$S(D, f) - s(D, f) = \sum_{k=1}^r \sum_{h=1}^s (M_{kh} - m_{kh}) A_{kh} \leq \varepsilon \text{Area}(Q)$$

e trovare la tesi applicando la Proposizione 1.11. □

**Teorema 1.18** (Teorema di Riduzione). *Sia  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}(Q)$ , dove  $Q = [a, b] \times [c, d]$ .*

a) Se  $\forall y \in [c, d]$  esiste l'integrale  $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  allora la funzione  $G$  è integrabile su  $[c, d]$  e vale

$$\iint_Q f = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (13)$$

b) Se  $\forall x \in [a, b]$  esiste l'integrale  $H(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  allora la funzione  $H$  è integrabile su  $[a, b]$  e vale

$$\iint_Q f = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (14)$$

**Osservazione 1.19.** • Le formule (13) e (14) sono dette **formule di riduzione** e gli elementi al membro destro sono detti integrali iterati.

• Se valgono (13) e (14) allora vale

$$\iint_Q f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy, \quad (15)$$

detta **formula di scambio dell'ordine di integrazione**.

• La validità di  $f \in \mathcal{R}(Q)$  NON implica la validità delle formule (13) e (14), devono infatti essere soddisfatte le ipotesi su  $G$  e  $H$ .

**Esempio 1.20.** Consideriamo  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  e la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1/2 \text{ e } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Mostrare per esercizio che  $f \in \mathcal{R}(Q)$  e  $\int_Q f = 0$ . In questo caso la funzione  $G$  è ben definita e vale  $G(y) = 0$  per ogni  $y \in [c, d]$ , quindi vale la formula (13). Invece non posso calcolare il valore  $H(1/2)$ , quindi non vale (14).

**Osservazione 1.21.** Sia  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  continua, allora  $f \in \mathcal{R}(Q)$  e la funzione

$$g_y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_y(x) = f(x, y)$$

è continua, quindi integrabile su  $[a, b]$ . Similmente la funzione

$$h_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_x(y) = f(x, y)$$

è integrabile su  $[c, d]$ . Quindi per funzioni continue valgono (13), (14) e (15)

**Osservazione 1.22.** Sia  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x, y) = g(x)h(y)$  ( $f$  si dice a variabili separabili), dove  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $g \in \mathcal{R}([a, b])$  e  $h \in \mathcal{R}([c, d])$  allora  $f \in \mathcal{R}(Q)$  e valgono sia (13) che (14). In particolare troviamo

$$\iint_Q f = \left( \int_a^b g(x) dx \right) \left( \int_c^d h(y) dy \right).$$

Dimostrare per esercizio questa formula.

Dimostriamo ora il teorema di riduzione. Dimostreremo la prima proprietà, la dimostrazione della seconda proprietà è lasciata come esercizio. Si può ottenere adattando il ragionamento.

*Dimostrazione del Teorema 1.18 di riduzione.* La funzione  $f$  è limitata, quindi esistono  $m, M$  tali che  $m \leq f(x, y) \leq M$  per ogni  $(x, y) \in Q$ . Consideriamo una qualsiasi partizione  $D = D_1 \times D_2$  di  $Q$ . Sapendo che  $\forall y \in [c, d]$  esiste l'integrale  $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  allora abbiamo

$$\sum_{k=1}^r m_k(y) \Delta x_k = s(D_1, f(\cdot, y)) \leq G(y) \leq S(D_1, f(\cdot, y)) = \sum_{k=1}^r M_k(y) \Delta x_k, \quad (16)$$

dove

$$m_k(y) = \inf_{x \in I_k} f(x, y) \quad \text{e} \quad M_k(y) = \sup_{x \in I_k} f(x, y).$$

Osserviamo che  $G$  è limitata, infatti, usando la partizione banale  $\hat{D}_1 = \{a, b\}$ , ovvero quella che "non suddivide" l'intervallo  $[a, b]$ , troviamo, per ogni  $y \in [c, d]$ ,

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \inf_{x \in [a, b]} f(x, y)(b-a) = s(\hat{D}_1, f(\cdot, y)) \\ &\leq G(y) \leq S(\hat{D}_1, f(\cdot, y)) = \sup_{x \in [a, b]} f(x, y)(b-a) \leq M(b-a). \end{aligned}$$

Consideriamo ora le somme inferiori e superiori di  $G$  rispetto alla partizione  $D_2$ :

$$s(D_2, G) = \sum_{h=1}^s \gamma_h \Delta y_h, \quad \gamma_h = \inf_{y \in J_h} G(y), \quad (17)$$

$$S(D_2, G) = \sum_{h=1}^s \Gamma_h \Delta y_h, \quad \Gamma_h = \sup_{y \in J_h} G(y). \quad (18)$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \gamma_h = \inf_{y \in J_h} G(y) &\geq \inf_{y \in J_h} \left( \sum_{k=1}^r m_k(y) \Delta x_k \right) && ! (16) ! \\ &= \inf_{y \in J_h} \left( \sum_{k=1}^r \inf_{x \in I_k} f(x, y) \Delta x_k \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^r \inf_{y \in J_h} \inf_{x \in I_k} f(x, y) \Delta x_k && (!) \\ &= \sum_{k=1}^r \inf_{(x, y) \in Q_{kh}} f(x, y) \Delta x_k = \sum_{k=1}^r m_{kh} \Delta x_k. \end{aligned}$$

Quindi possiamo calcolare

$$s(D_2, G) = \sum_{h=1}^s \gamma_h \Delta y_h \geq \sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^r m_{kh} \Delta x_k \Delta y_h = s(D, f). \quad (19)$$

Analogamente abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma_h = \sup_{y \in J_h} G(y) &\leq \sup_{y \in J_h} \left( \sum_{k=1}^r M_k(y) \Delta x_k \right) && ! (16) ! \\ &= \sup_{y \in J_h} \left( \sum_{k=1}^r \sup_{x \in I_k} f(x, y) \Delta x_k \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^r \sup_{y \in J_h} \sup_{x \in I_k} f(x, y) \Delta x_k && (!) \\ &= \sum_{k=1}^r \sup_{(x, y) \in Q_{kh}} f(x, y) \Delta x_k = \sum_{k=1}^r M_{kh} \Delta x_k. \end{aligned}$$

Quindi possiamo calcolare

$$S(D_2, G) = \sum_{h=1}^s \Gamma_h \Delta y_h \leq \sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^r M_{kh} \Delta x_k \Delta y_h = S(D, f). \quad (20)$$

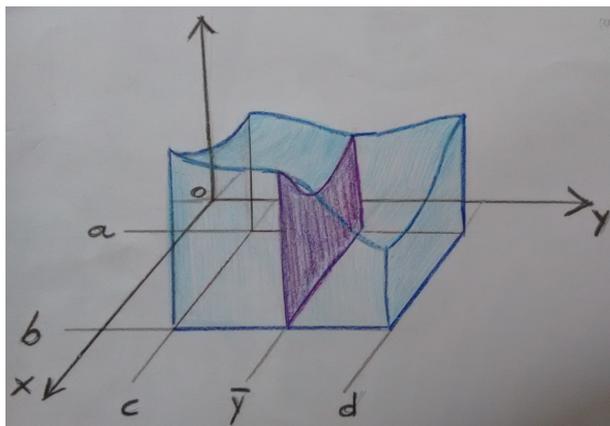


Figura 3: Vedi Osservazione 1.23.

Mettendo assieme le disuguaglianze trovate in (19) e (20), abbiamo

$$s(D, f) \leq s(D_2, G) \leq S(D_2, G) \leq S(D, f). \quad (21)$$

Tutto il procedimento precedente può essere adottato per una qualsiasi partizione. Utilizziamo ora l'ipotesi  $f \in \mathcal{R}(Q)$ : per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione  $D = D_1 \times D_2$  tale che  $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$ . Questo, insieme a (21), ci porta a trovare la partizione  $D_2$  tale che  $S(D_2, G) - s(D_2, G) < \varepsilon$ , concludendo che  $G \in \mathcal{R}([c, d])$ . Inoltre, sempre dalla (21) troviamo che

$$\begin{aligned} s(D, f) \leq s(D_2, G) &\leq \int_c^d G(y) dy \leq S(D_2, G) \leq S(D, f) \leq s(D, f) + \varepsilon, \\ s(D, f) &\leq \iint_Q f \leq S(D, f) \leq s(D, f) + \varepsilon, \end{aligned}$$

quindi

$$\left| \int_c^d G(y) dy - \iint_Q f \right| < \varepsilon$$

concludendo la dimostrazione. □

Diamo ora un'interpretazione geometrica dell'integrale.

**Osservazione 1.23.** Sia  $Q = [a, b] \times [c, d]$ ,  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}(Q)$ , tale che  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in Q$ . Ricordiamo l'insieme

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in Q, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

già visto in (3). Dato  $\bar{y} \in [c, d]$ , il valore  $G(\bar{y}) = \int_a^b f(x, \bar{y}) dx$  (se calcolabile!) è l'area dell'insieme  $T_{\bar{y}} = T \cap \{y = \bar{y}\}$ . Quindi abbiamo

$$\text{Vol}(T) = \int_c^d \text{Area}(T_y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

**Esempio 1.24.** Sia  $f : [1, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x \cos y$ , allora

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \left( \int_1^2 x dx \right) \left( \int_0^1 \cos y dy \right) = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^2 [\sin y]_0^1 = \frac{3}{2} \sin 1.$$

**Esempio 1.25.** Sia  $f : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{y}{1+x+y}$ , allora

$$\begin{aligned} \iint_Q f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \left( \int_0^1 \frac{y}{1+x+y} dx \right) dy \\ &= \int_0^2 [y \ln(1+x+y)]_0^1 dy \\ &= \int_0^2 y \ln(2+y) - y \ln(1+y) dy = \dots \end{aligned}$$

Da qui in avanti si prosegue integrando per parti e operando come già visto nel corso precedente. Per esercizio completare il calcolo e provare a risolvere l'integrale invertendo l'ordine di integrazione

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^2 \frac{y}{1+x+y} dy \right) dx = \dots$$

Si noterà che i calcoli nei due casi non hanno la stessa difficoltà. Quindi è spesso determinante in quale modo si sceglie di ridurre l'integrale.

**Esempio 1.26.** Sia  $f : [0, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \sin(xy)x$ , allora

$$\begin{aligned} \iint_Q f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \left( \int_0^1 \sin(xy)x dy \right) dx \\ &= \int_0^2 [-\cos(xy)]_0^1 dx \\ &= \int_0^2 1 - \cos x dx = [x - \sin x]_0^2 = 2 - \sin 2. \end{aligned}$$

## 2 Misura di Peano-Jordan e insiemi misurabili

**Definizione 2.1.** Consideriamo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitato e una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Sia  $Q$  un rettangolo che contenga  $\Omega$  e definiamo l'estensione a zero di  $f$  come

$$\tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } x \in \Omega, \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Diremo che  $f$  è **integrabile secondo Riemann su  $\Omega$**  se la sua estensione  $\tilde{f}$  è integrabile secondo Riemann su  $Q$ , ponendo

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_Q \tilde{f}(x, y) dx dy.$$

Denoteremo con  $\mathcal{R}(\Omega)$  l'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann sull'insieme  $\Omega$ .

Naturalmente, dalla definizione segue che  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  implica  $f$  limitata, in quanto la limitatezza rientra tra le ipotesi della definizione.

**Esercizio 2.2.** Dimostrare che la scelta di  $Q$  non influenza il valore dell'integrale. Si considerino due rettangoli  $\tilde{Q}, \hat{Q}$  entrambi contenenti  $\Omega$  e le associate estensioni a zero  $\tilde{f} : \tilde{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\hat{f} : \hat{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ . Vale  $\Omega \subset \tilde{Q} \cap \hat{Q}$  dove l'intersezione è un rettangolo. Quindi valutando il valore di somme superiori e inferiori sugli insiemi  $\tilde{Q} \cap \hat{Q}$ ,  $\tilde{Q} \setminus \hat{Q}$  e  $\hat{Q} \setminus \tilde{Q}$ ...

Obiettivo ora è rispondere alla domanda: "Quali insiemi  $\Omega$  ha senso considerare? Ci sono insiemi non adatti a definire un insieme  $\mathcal{R}(\Omega)$ ?"

Intuitivamente, reputeremmo non adatto un insieme  $\Omega$  tale che nemmeno le funzioni costanti risultino integrabili secondo Riemann su questo insieme. In particolare la funzione costantemente uguale a 1. La prossima definizione è un'immediata conseguenza di questo ragionamento.

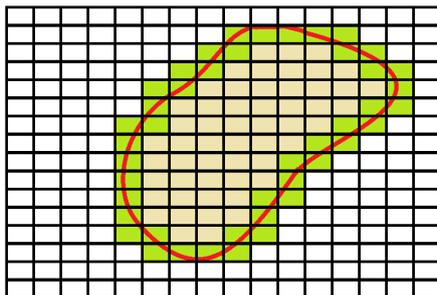


Figura 4: Vedi Osservazione 2.5.

**Definizione 2.3** (Insiemi misurabili). Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitato contenuto in un rettangolo  $Q$ . Diremo che  $\Omega$  è misurabile secondo Peano-Jordan se la funzione caratteristica di  $\Omega$

$$\chi_\Omega : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_\Omega = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

è integrabile secondo Riemann su  $Q$ . Definiamo **area di  $\Omega$**  il valore<sup>1</sup>

$$\text{Area}(\Omega) = |\Omega| = m(\Omega) = \iint_\Omega 1 \, dx \, dy = \iint_Q \chi_\Omega \, dx \, dy.$$

**Osservazione 2.4.** Nella definizione precedente è equivalente chiedere che la funzione costante  $f(x, y) = 1$  è integrabile secondo Riemann su  $\Omega$ . In questo caso, infatti l'estensione  $\tilde{f}$  coincide proprio con  $\chi_\Omega$ .

**Osservazione 2.5** (La misura di Peano-Jordan a 8 anni.). Il concetto di misura di Peano-Jordan è quello che ci è stato proposto fin dalla scuola primaria. Pensiamo di prendere una certa regione di piano  $\Omega$  disegnata su un foglio quadrettato rettangolare. L'insieme  $Q$  è il foglio, la quadrettatura rappresenta la partizione  $D$ . Consideriamo quindi la funzione caratteristica  $\chi_\Omega$ . Le somme inferiori  $s(D, \chi_\Omega)$  contano i quadratini contenuti totalmente in  $\Omega$ , mentre le somme superiori  $S(D, \chi_\Omega)$  contano i quadratini che intersecano  $\Omega$  in almeno un punto.

Dal ragionamento appena fatto risulta ovvio che se prendiamo un foglio di carta millimetrata i risultati sono più accurati e che il valore  $S(D, \chi_\Omega) - s(D, \chi_\Omega)$  tenderà a zero riducendo ulteriormente la grandezza dei quadratini.

**Esempio 2.6.** Ovviamente i rettangoli  $Q = [a, b] \times [c, d]$  sono insiemi misurabili secondo Peano-Jordan e vale  $|Q| = (b - a)(d - c)$ , mentre l'insieme  $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0, 1] \times [0, 1])$  non lo è (cf. Esempio 1.10).

**Definizione 2.7** (Insieme di misura nulla). Un insieme  $E$  limitato si dice di misura nulla se è misurabile e vale  $|E| = 0$ .

**Nota 2.8.** L'insieme  $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0, 1] \times [0, 1])$  non ha misura nulla secondo Peano-Jordan; non è nemmeno misurabile!

Esiste un altro tipo di misura, chiamata misura di Lebesgue introdotta al fine di definire l'integrale di Lebesgue. Secondo questa misura l'insieme precedente risulta misurabile con misura di Lebesgue nulla.

**Teorema 2.9** (Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla). Sia  $E \subset \mathbb{R}^2$  limitato. L'insieme  $E$  ha misura di Peano-Jordan nulla se e solo se  $\forall \varepsilon > 0$  esistono dei rettangoli  $Q_1, \dots, Q_n$  (in numero finito!) tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n Q_i, \quad \sum_{i=1}^n |Q_i| < \varepsilon.$$

<sup>1</sup>Qui forniamo diverse possibili notazioni per l'area dell'insieme  $\Omega$  usate in letteratura.

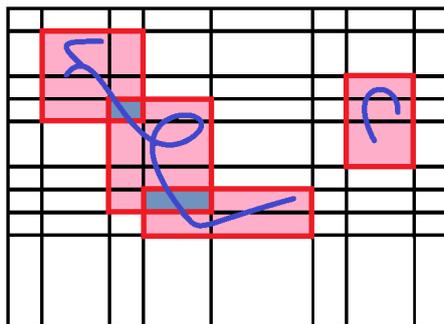


Figura 5: Un'idea dell'implicazione " $\Leftarrow$ " della dimostrazione del Teorema 2.9.

*Dimostrazione. Implicazione " $\Rightarrow$ ".* Poiché  $\int_Q \chi_E = 0$  allora 0 è l'estremo inferiore delle somme superiori, quindi per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione  $D$  tale che  $S(D, \chi_E) < \varepsilon$ , in particolare

$$\varepsilon > S(D, \chi_E) = \sum_{k,h} M_{kh} |Q_{kh}| = \sum_{\bullet} |Q_{kh}|$$

dove  $\sum_{\bullet}$  indica che la somma è effettuata sugli indici  $k, h$  tali che  $Q_{kh} \cap E \neq \emptyset$ , che sono gli indici per cui  $M_{kh} = 1$ ; gli altri soddisfano  $M_{kh} = 0$ . Poiché la partizione  $D$  è formata da un numero finito di rettangolini, a maggior ragione è finito il numero di rettangolini della partizione che soddisfano la proprietà  $Q_{kh} \cap E \neq \emptyset$ .

*Implicazione " $\Leftarrow$ ".* Dall'ipotesi consideriamo un rettangolo  $Q = [a, b] \times [c, d]$  che contenga l'insieme  $\bigcup_{i=1}^n Q_i$ , dove denotiamo i rettangolini come  $Q_i = [\alpha_i, \beta_i] \times [\gamma_i, \delta_i]$ . Consideriamo le partizioni individuate dai vertici dei rettangoli  $Q, Q_1, \dots, Q_n$ :

$$\begin{aligned} D_1 &= \{a, b, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n\}, \\ D_2 &= \{c, d, \gamma_1, \delta_1, \dots, \gamma_n, \delta_n\}, \\ D &= D_1 \times D_2. \end{aligned}$$

Possiamo concludere che

$$S(D, \chi_E) = \sum_{k,h} M_{kh} |Q_{kh}| \stackrel{!}{\leq} \sum_{\diamond} |Q_{kh}| \stackrel{!!}{\leq} \sum_{i=1}^n |Q_i| < \varepsilon,$$

dove in " $\diamond$ " la somma è effettuata sui rettangoli di indici  $k, h$  tali che  $Q_{kh} \subset Q_i$  per un qualche indice  $i$ . La disuguaglianza denotata con " $!$ " si ha perché maggioriamo il valore  $M_{kh}$  con il valore 1 su tutti i rettangoli coinvolti nella sommatoria, i rettangoli che sono stati esclusi dalla somma invece hanno sicuramente valore  $M_{kh} = 0$  e non davano alcun contributo. La disuguaglianza denotata con " $!!$ " si ha perché se qualche rettangolino  $Q_{kh}$  fosse contenuto in diversi rettangoli  $Q_i$ , con questo passaggio conteremmo la sua area più volte.  $\square$

**Teorema 2.10** (Caratterizzazione degli insiemi misurabili). *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitato,  $\Omega$  è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se  $\partial\Omega$  ha misura di Peano-Jordan nulla.*

*Dimostrazione omessa.*

Da qui in avanti ometteremo di specificare che stiamo considerando la misura di Peano-Jordan, sottintendendolo.

**Esempio 2.11.** • *Un numero finito di punti forma un insieme di misura nulla.*

- *Dato un insieme di misura nulla, tutti i suoi sottoinsiemi hanno misura nulla.*
- *Un sottoinsieme limitato di una retta (es. un segmento) ha misura nulla.*
- *L'unione finita di insiemi di misura nulla ha misura nulla.*
- *La regione di piano delimitata da un poligono è un insieme misurabile.*

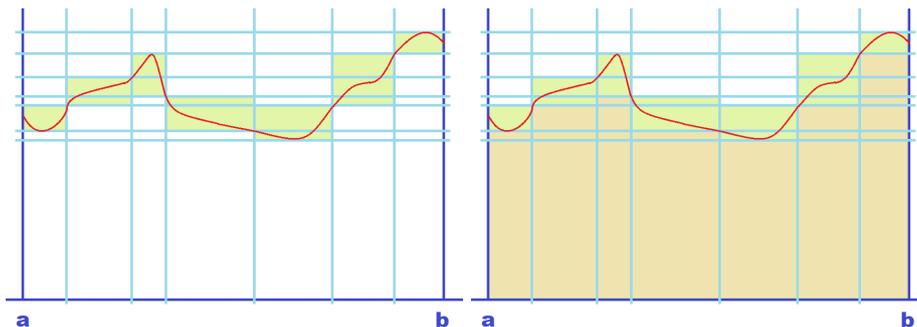


Figura 6: A sinistra, uno schizzo della dimostrazione della Proposizione 2.12: i rettangoli in verde rappresentano i rettangoli  $Q_i$  introdotti nella dimostrazione. A destra, uno schizzo della dimostrazione del Corollario 2.13: si noti che le somme  $s(D_1, g)$  contano le aree dei sette rettangoli alti in arancione, mentre le  $s(D, \chi_A)$  contano le aree di tutti i rettangolini arancioni di cui sono costituiti; l'area totale è la stessa. Analogamente per le somme  $S(D_1, g)$  e  $S(D, \chi_A)$  dobbiamo aggiungere il contributo delle aree in verde.

**Proposizione 2.12.** Sia  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$ , allora il grafico di  $g$

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y = g(x)\}$$

è un insieme di misura nulla.

*Dimostrazione.* Dal fatto che  $g \in \mathcal{R}([a, b])$  abbiamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione  $D_1 = \{x_0, \dots, x_r\}$  di  $[a, b]$  tale che  $S(D_1, g) - s(D_1, g) < \varepsilon$ . Definiamo i rettangoli

$$Q_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i], \quad \text{dove } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x), \quad i = 1, \dots, r. \quad (22)$$

Notiamo che

$$G \subseteq \bigcup_{i=1}^r Q_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r |Q_i| = \sum_{i=1}^r (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = S(D_1, g) - s(D_1, g) < \varepsilon,$$

da cui giungiamo alla tesi grazie al Teorema 2.9.  $\square$

**Corollario 2.13.** Sia  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in \mathcal{R}([a, b])$ , tale che  $g(x) \geq 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ , allora l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x)\}$$

è un insieme misurabile e vale

$$|A| = \int_a^b g(x) dx$$

*Dimostrazione.* Seguiamo il ragionamento della dimostrazione precedente. Dato  $\varepsilon$  possiamo trovare la partizione  $D_1 = \{x_0, \dots, x_r\}$  di  $[a, b]$  tale che  $S(D_1, g) - s(D_1, g) < \varepsilon$  e definire i valori  $m_i, M_i$  come in (22) e  $M = \max M_i$ . L'insieme  $A$  è contenuto nel rettangolo  $Q = [a, b] \times [0, M]$ , di cui introduciamo la partizione  $D = D_1 \times D_2$  dove  $D_2 = \{0, m_1, M_1, \dots, m_r, M_r\}$ . Possiamo calcolare

$$s(D, \chi_A) = s(D_1, g), \quad S(D, \chi_A) = S(D_1, g),$$

da cui troviamo che  $\chi_A \in \mathcal{R}(Q)$  e  $\iint_Q \chi_A = \int_a^b g(x) dx$ .  $\square$

### 3 Integrazione su domini normali

**Definizione 3.1** (Dominio normale). • Dato l'intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , siano date le funzioni  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_1, g_2 \in \mathcal{R}([a, b])$  tali che  $g_1(x) \leq g_2(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ . L'insieme

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

si dice dominio normale rispetto all'asse  $x$  (o regione  $y$ -semplice).

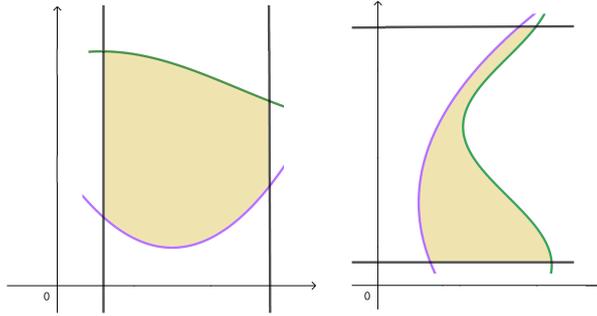


Figura 7: Vedi Definizione 3.1.

- Dato l'intervallo  $[c, d] \subset \mathbb{R}$ , siano date le funzioni  $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_1, h_2 \in \mathcal{R}([c, d])$  tali che  $h_1(y) \leq h_2(y)$  per ogni  $y \in [c, d]$ . L'insieme

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

si dice **dominio normale rispetto all'asse  $y$**  (o **regione  $x$ -semplice**).

**Osservazione 3.2.** Dal corollario precedente risulta che  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  sono insiemi misurabili e

$$|\mathcal{E}| = \int_a^b g_2(x) - g_1(x) dx \quad e \quad |\mathcal{F}| = \int_c^d h_2(y) - h_1(y) dy.$$

**Esempio 3.3** (Il cerchio). Il cerchio di raggio  $R$  centrato nell'origine può essere visto come dominio normale rispetto all'asse  $x$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-R, R], -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\} \end{aligned}$$

dove, da un calcolo probabilmente già visto,

$$|\mathcal{E}| = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} - \left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right) dx = \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - x^2} dx = \dots = \pi R^2.$$

**Esempio 3.4** (L'ellisse). L'ellisse di assi  $a$  e  $b$  può essere visto come dominio normale rispetto all'asse  $x$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-a, a], -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\} \end{aligned}$$

dove, da un calcolo probabilmente già visto,

$$|\tilde{\mathcal{E}}| = \int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \left(-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) dx = \int_{-a}^a 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \dots = \pi ab.$$

**Definizione 3.5.** Sia  $Q = [a, b] \times [c, d]$  e  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. La funzione  $f$  si dice **generalmente continua** se l'insieme dei punti di discontinuità di  $f$  ha misura di Peano-Jordan nulla.

**Teorema 3.6.** Sia  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Se  $f$  è generalmente continua allora  $f$  è integrabile secondo Riemann su  $Q$ .

*Dimostrazione.* Sia  $E$  l'insieme dei punti di discontinuità di  $f$ . Possiamo supporre che  $E$  sia contenuto in  $\mathring{Q}$ : infatti se così non fosse potremmo considerare un rettangolo più grande  $Q'$ , tale che  $\mathring{Q}' \supset Q$ , e l'estensione a zero  $\tilde{f} : Q' \rightarrow \mathbb{R}$  della funzione  $f$ . Tale funzione avrà come insieme dei punti di discontinuità  $E'$  tale che

$E' \subseteq E \cup \partial Q$ , in quanto un punto di discontinuità di  $f$  sarà un punto di discontinuità di  $\tilde{f}$  e non saremo in grado di garantire la continuità sulla frontiera del rettangolo  $Q$ . La funzione  $\tilde{f}$  così definita ha le proprietà richieste dal teorema e risulta  $f \in \mathcal{R}(Q)$  se e solo se  $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q')$ .

Per ipotesi l'insieme  $E$  dei punti di discontinuità ha misura nulla, quindi dal Teorema 2.9, per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono dei rettangoli  $Q_1, \dots, Q_n$  tali che<sup>2</sup>

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathring{Q}_i, \quad \sum_{i=1}^n |Q_i| < \varepsilon.$$

Consideriamo l'insieme  $C = Q \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathring{Q}_i$ . Notiamo che  $C$  è chiuso e limitato, quindi compatto. La restrizione  $f|_C : C \rightarrow \mathbb{R}$  è quindi uniformemente continua.

Dato il valore  $\varepsilon$  scelto precedentemente possiamo quindi trovare  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C$ ,

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon. \quad (23)$$

Consideriamo ora una partizione  $D$  di  $Q$  tale che  $|D| < \delta$  avente la seguente proprietà: ogni rettangolo  $Q_i$  precedentemente introdotto si può ottenere dall'unione di alcuni rettangoli  $Q_{kh}$  della partizione, ovvero chiediamo che  $Q_{kh} \subseteq Q_i$  ogni qualvolta  $Q_{kh} \cap \mathring{Q}_i \neq \emptyset$ . Tale condizione è soddisfatta se includiamo nelle partizioni  $D_1$  e  $D_2$  le coordinate dei vertici dei rettangoli  $Q_i$ .

Divideremo i rettangoli  $Q_{kh}$ , in due gruppi:

- (1) Il primo gruppo comprende i rettangoli  $Q_{kh}$  contenuti in uno dei rettangoli  $Q_i$ . In questo caso usiamo la stima  $M_{kh} - m_{kh} \leq M - m$  con  $M = \sup_Q f$  e  $m = \inf_Q f$ . Sommando i contributi trovo:

$$\sum_{Q_{kh}:(1)} (M_{kh} - m_{kh})|Q_{kh}| \leq \sum_{Q_{kh}:(1)} (M - m)|Q_{kh}| = (M - m) \sum_{Q_{kh}:(1)} |Q_{kh}| < (M - m)\varepsilon.$$

- (2) Il secondo gruppo comprende i rettangoli  $Q_{kh}$  contenuti nell'insieme  $C$ . In questo caso, usando la (23) e ricordando che  $|D| < \delta$  troviamo  $M_{kh} - m_{kh} < \varepsilon$ . Sommando i contributi trovo:

$$\sum_{Q_{kh}:(2)} (M_{kh} - m_{kh})|Q_{kh}| < \sum_{Q_{kh}:(2)} \varepsilon|Q_{kh}| = \varepsilon \sum_{Q_{kh}:(2)} |Q_{kh}| = \varepsilon|C| \leq \varepsilon|Q|.$$

Concludiamo quindi con

$$\begin{aligned} S(D, f) - s(D, f) &= \sum_{k,h} (M_{kh} - m_{kh})|Q_{kh}| \\ &= \sum_{Q_{kh}:(1)} (M_{kh} - m_{kh})|Q_{kh}| + \sum_{Q_{kh}:(2)} (M_{kh} - m_{kh})|Q_{kh}| < \varepsilon(M - m + |Q|), \end{aligned}$$

quindi  $f \in \mathcal{R}(Q)$ . □

**Corollario 3.7.** *Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua definita su  $\Omega$  insieme misurabile compatto, allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ .*

*Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua e limitata definita su  $\Omega$  insieme misurabile limitato, allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $Q$  tale che  $\Omega \subseteq Q$  e l'estensione  $\tilde{f}$  su  $Q$ . La funzione  $\tilde{f}$  è limitata e discontinua al più in  $\partial\Omega$ , che essendo  $\Omega$  misurabile, ha misura nulla. Quindi  $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$ , essendo  $\tilde{f}$  generalmente continua, da cui la tesi. □

Il precedente corollario, ci permette di applicare il Teorema di riduzione 1.18 in presenza di funzioni definite su domini normali individuati da funzioni continue.

<sup>2</sup>Esercizio: perché possiamo prendere  $\mathring{Q}_i$  invece di  $Q_i$ ?

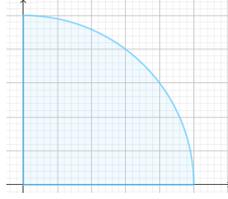


Figura 8: Vedi Esempio 3.9.

**Corollario 3.8** (Integrazione su domini normali). • Consideriamo un dominio  $\mathcal{E}$  normale rispetto all'asse  $x$ , definito come sopra:

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

dove  $g_1, g_2$  sono continue. Sia  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e continua su  $\mathring{\mathcal{E}}$ , allora  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{E})$  e vale

$$\iint_{\mathcal{E}} f = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (24)$$

• Consideriamo un dominio  $\mathcal{F}$  normale rispetto all'asse  $y$ , definito come sopra:

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

dove  $h_1, h_2$  sono continue. Sia  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e continua su  $\mathring{\mathcal{F}}$ , allora  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{F})$  e vale

$$\iint_{\mathcal{F}} f = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy. \quad (25)$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione si ha osservando che, dato un rettangolo  $Q$  che contiene  $\mathcal{E}$ ,

$$\iint_Q \tilde{f} = \int_a^b \left( \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Analogo ragionamento per l'insieme  $\mathcal{F}$ . □

**Esempio 3.9.** Calcoliamo l'integrale  $\int_{\Omega} x\sqrt{y} dx dy$  dove  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

Possiamo dapprima osservare che  $\Omega$  può essere scritto come dominio normale rispetto ad entrambi gli assi:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} \quad (26)$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}. \quad (27)$$

Osserviamo, utilizzando la formulazione (26) che le funzioni  $g_1(x) = 0$  e  $g_2(x) = \sqrt{1-x^2}$  sono ben definite e continue in  $[0, 1]$ . La funzione  $f(x, y) = x\sqrt{y}$  è continua su  $\mathbb{R} \times [0, +\infty) \supset \Omega$ . Possiamo quindi utilizzare la formula (24):

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x\sqrt{y} dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \left[ \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} x (1-x^2)^{\frac{3}{4}} dx \quad \text{☹} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} s^{\frac{3}{4}} ds = \frac{1}{3} \frac{4}{7} = \frac{4}{21}, \end{aligned}$$

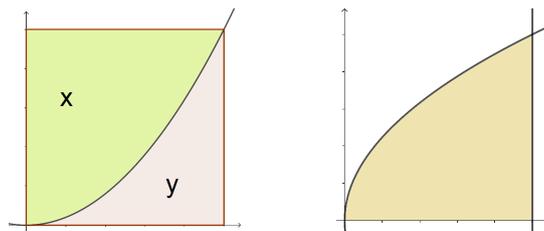


Figura 9: Vedi Esempio 3.10 ed Esempio 3.11.

dove abbiamo effettuato la sostituzione  $s = 1 - x^2$ .

Applicando invece la formula (25):

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} x\sqrt{y} \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\sqrt{y} \, dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \sqrt{y} \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy \\
 &= \int_0^1 \sqrt{y} \frac{1}{2} (1 - y^2) dy \quad \text{😊} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{5}{2}} dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} - \frac{2}{7} \right] = \frac{4}{21}.
 \end{aligned}$$

Notiamo che è più conveniente intraprendere la seconda strada.

**Esempio 3.10.** Consideriamo  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  e

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y \geq x^2 \\ y & \text{se } y < x^2. \end{cases}$$

Notiamo che  $f$  è discontinua al più sull'insieme  $G = \{(x, y) \in Q \mid y = x^2\}$  ma esso ha misura nulla essendo  $G$  il grafico della funzione continua  $g(x) = x^2$ . Quindi  $f$  è generalmente continua e dal Teorema 3.6 abbiamo  $f \in \mathcal{R}(Q)$ . Calcoliamo quindi l'integrale:

$$\begin{aligned}
 \iint_Q f &= \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} y \, dy + \int_{x^2}^1 x \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left( \left[ \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{x^2} + x[y]_{x^2}^1 \right) dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2}x^4 + x - x^3 \, dx = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}.
 \end{aligned}$$

**Esercizio 3.11.** Consideriamo ora la regione chiusa di piano  $\Omega$  delimitata dalle rette  $y = 0$ ,  $x = 1$  e dall'arco di parabola  $x = y^2$ . Questa regione può essere scritta in forma di dominio normale come

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{x}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1], y^2 \leq x \leq 1\}.
 \end{aligned}$$

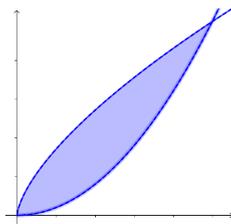


Figura 10: Vedi Esempio 3.12.

L'integrale di una funzione continua  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  può essere quindi calcolato mediante due approcci:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_{y^2}^1 f(x, y) \, dx \right) dy \end{aligned}$$

Calcolare l'integrale su  $\Omega$  delle seguenti funzioni: (a)  $f(x, y) = xy$ , (b)  $f(x, y) = xye^y$ , (c)  $f(x, y) = y^3e^{xy}$ .

**Esempio 3.12.** Dato l'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x^{2/3}\},$$

calcoliamo l'integrale

$$\iint_{\Omega} xe^{y^2} \, dx \, dy.$$

L'insieme è palesemente un dominio normale rispetto all'asse  $x$ , quindi possiamo impostare l'integrale come

$$\iint_{\Omega} xe^{y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{x^{2/3}} xe^{y^2} \, dy \right) dx,$$

ma sorge il seguente problema: non sappiamo calcolare la primitiva di  $e^{y^2}$  (ricordiamo che  $x$  va trattato come una costante, mentre integriamo nella variabile  $y$ ).

Dobbiamo trovare un'altra strada. Possiamo scrivere  $\Omega$  come dominio normale rispetto all'asse  $y$ :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y^{3/2} \leq x \leq y^{1/2}\}.$$

In questo caso abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} xe^{y^2} \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_{y^{3/2}}^{y^{1/2}} xe^{y^2} \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_{y^{3/2}}^{y^{1/2}} e^{y^2} \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y - y^3)e^{y^2} \, dy = \dots \end{aligned}$$

A questo punto l'integrale può essere risolto scegliendo la sostituzione  $s = y^2$  e integrando per parti. Completare per esercizio.

**Nota 3.13** (Cose da non fare). Supponiamo di dover integrare una funzione su un rettangolo  $Q = [a, b] \times [c, d]$ ; è sconsigliabile scrivere semplicemente

$$\iint_Q f = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

senza le parentesi tonde si rischierebbe alla lunga di confondere gli estremi di integrazione (al passaggio successivo verrebbe voglia di scrivere  $dx dy$  al posto di  $dy dx$ ). A volte si preferisce una scrittura del tipo

$$\iint_Q f = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y),$$

affiancando ad ogni simbolo di integrale la variabile a cui si riferiscono gli estremi nell'ordine in cui verranno effettuati gli integrali (partendo da destra verso sinistra). Tuttavia questa notazione presenta la seguente difficoltà: non è più palese dove finisce l'integrale. In un certo senso il simbolo di integrale  $\int$  fa da parentesi aperta e un termine come  $dx$  fa da parentesi chiusa.

Inoltre, adottando quest'ultimo tipo di notazione, richiamando i calcoli dell'Esempio 3.12, risulta **sbagliatissima** una scrittura del tipo

$$\int_{y^{3/2}}^{y^{1/2}} dx \int_0^1 dy x e^{y^2},$$

infatti, con questa notazione, dovremmo integrare prima nella variabile  $y$  (che quindi scomparirebbe dall'argomento dell'integrale nella variabile  $x$ ), poi nella variabile  $x$  e qui le  $y$  comparirebbero ottenendo una funzione invece che un numero reale! Questo erroraccio è stato visto in diversi esami scritti!