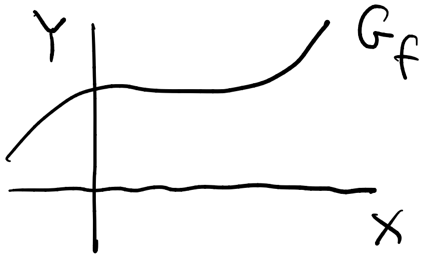
Funzioni o applicazioni o mappe

Una funzione dall'insieme X all'insieme Y è una terna $f = (X, Y, G_f)$ dove $G_f \subset X \times Y$ è un sottoinsieme (una relazione) tale che:

$$\forall x \in X \quad \underset{\text{esiste unico}}{\exists!} \, y \in Y \quad \text{con } (x,y) \in G_f$$

Scriviamo $y = f(x)$



X si chiama dominio di f

Y " " codominio di f

$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$

si chiama grafico di f.

$\boxed{\text{Si scrive } f : X \to Y.}$

OSS Una funzione ha sempre dominio, codominio e grafico: denotiamo il dominio di f con $\mathrm{dom}(f)$ e il codominio con $\mathrm{codom}(f)$.

Es. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$

$f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ è una funzione

$f(1) = 1$

$f(2) = 1$

$f(3) = 2$

Si scrive anche

$1 \mapsto 1$

$2 \mapsto 1$

$3 \mapsto 2$

$$\{1, 2, 3\} \xrightarrow{f} \{1, 2\}$$

Due funzioni $f: X \to Y$ e $g: X' \to Y'$ sono uguali $\iff X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X$.

Es

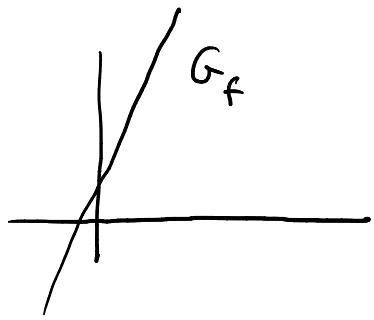
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è diversa da $g: [0,1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2x+1$ $\qquad$ $g(x) = 2x+1$

perché hanno domini diversi.

$G_f = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R})$

retta nel piano



Composizione di funzioni

Date $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ $\rightsquigarrow$ $g \circ f: X \to Z$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \forall x \in X$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

funzione composta (leggi f composto g o g tondo f).

$g \circ f$ è definita $\iff$ $\mathrm{Codom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$

codominio $\qquad$ dominio

è importante l'ordine!

Es

$f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$

$1 \mapsto 2$

$2 \mapsto 1$

$3 \mapsto 1$

$g: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$

$1 \mapsto 1$

$2 \mapsto 3$

$3 \mapsto 2$

$$g \circ f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$$

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 3 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

$$1 \xmapsto{f} 2 \xrightarrow{g} 3$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{g \circ f}$$

$$f \circ g : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$$

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 2 \\ 2 &\mapsto 1 \\ 3 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Si ha $f \circ g \neq g \circ f$

<u>NB</u> $f \circ g$ è definita se $\mathrm{codom}(f) = \mathrm{dom}(g)$.

Vale la proprietà associativa (quando la composizione è possibile): $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$$\forall \quad X \xrightarrow[f]{} Y \xrightarrow[g]{} Z \xrightarrow[h]{} V$$

Infatti
$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\big(g(f(x))\big)$$
$$\|$$
$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\big(g(f(x))\big).$$

Se $f : X \to Y$ si chiama immagine di f il sottoinsieme

$$\mathrm{im}(f) := \{ y \in Y \mid \exists\, x \in X \text{ con } y = f(x) \} =$$
$$= \{ f(x) \mid x \in X \} \subset Y$$

<u>NB</u> Non confondere immagine e codominio:

$$\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{codom}(f).$$

Se $x \in X$, $f(x) \in Y$ si chiama <u>immagine</u> di x

Se $A \subset X$, $f(A) := \{ f(x) \mid x \in A \} \subset Y$ è l'<u>immagine</u> di A tramite f

Se $y \in Y$, $f^{-1}(y) := \{ x \in X \mid f(x) = y \} \subset X$ <u>immagine inversa</u> (o <u>preimmagine</u>) di y.

Se $B \subset Y$, $f^{-1}(B) := \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \subset X$ è l'<u>immagine inversa</u> (o <u>preimmagine</u>) di B.

Si ha quindi $\mathrm{im}(f) = f(X) \subset Y$, $X = f^{-1}(Y)$.

<u>Es</u> $f : \{1,2,3,4\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}$

$$
\begin{aligned}
1 &\longmapsto 2 \\
2 &\longmapsto 1 \\
3 &\longmapsto 1 \\
4 &\longmapsto 3
\end{aligned}
$$

$f(1) = 2$, $\underset{\text{(sottoinsieme)}}{f^{-1}(2) = \{1\}}$, $f^{-1}(1) = \{2,3\}$,

$f^{-1}(\{1,3\}) = \{2,3,4\}$, $f(\{2,3,4\}) = \{1,3\}$

$\mathrm{im}(f) = \{1,2,3\}$

<u>Identità e inclusione</u> Per ogni insieme X la funzione $id_X : X \to X$, $id_X(x) = x \ \forall x \in X$ è detta <u>funzione identica</u> (o <u>identità</u>) di X.

Se $A \subset X$ è un sottoinsieme, la funzione $i_A : A \to X$, $i_A(x) = x \ \forall x \in A$ è la <u>funzione d'inclusione</u> di A in X.

Si ha quindi $\forall f: X \to Y$,

$$f \circ id_X = f = id_Y \circ f .$$

Def Una funzione $f: X \to Y$ è detta:

i) <u>iniettiva</u> se $\forall x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (elementi diversi di X hanno immagini diverse)

ii) <u>suriettiva</u> se $im(f) = Y$ (cioè $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

iii) <u>biiettiva</u> (o <u>biunivoca</u>) se f è iniettiva e suriettiva.

Teorema $f: X \to Y$ è biiettiva $\Leftrightarrow \exists g: Y \to X$ funzione t.c. $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$. Una tale g se esiste è unica e si chiama funzione inversa di f e la si denota con f^{-1}.

NB Non confondere l'immagine inversa $f^{-1}(y) \subset X$ che esiste sempre ed è un sottoinsieme di X, con la funzione inversa $f^{-1}: Y \to X$ che esiste se e solo se f è biiettiva.

Es 1) La funzione f dell'esempio precedente non è né iniettiva $(f(2) = f(3))$ né suriettiva.

2) $g: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} 1 &\to 2 \\ 2 &\to 3 \\ 3 &\to 1 \end{aligned}$$

biiettiva

3) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$h(x) = 2x$$

iniettiva ma non suriettiva

$\operatorname{im}(h)$ è l'insieme dei numeri pari

4) $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\ell(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x-1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

suriettiva non iniettiva $(\ell(0) = \ell(1))$

5) id_X biiettiva ; i_A iniettiva

Teorema Sia X un <u>insieme finito</u> e $f : X \to X$ una funzione. Allora le seguenti sono equivalenti:

i) f è iniettiva

ii) f è suriettiva

iii) f è biiettiva.

<u>NB</u> Se X è infinito non vale!