14 ottobre

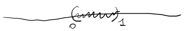
Def $X \subseteq \mathbb{R}$ $X \neq \emptyset$ l'estremo superiore $s = \sup(X)$ è un elemento di $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e soddisfa

1) $s \geq x$ $\forall x \in X$

2) $M \geq x$ $\forall x \in X \Rightarrow s \leq M$

Fra poco $\sup \mathbb{N} = \sup\{1,2,3,4,\dots\} = +\infty$

Esempio $\sup(0,1) = \sup\{x : 0 < x < 1\} = 1$



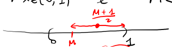

Infatti $1 \geq x$ $\forall x \in (0,1)$ 1° proprietà OK

Vogliamo dimostrare che

$*$ $\boxed{M \geq x \quad \forall x \in (0,1) \Rightarrow M \geq 1}$ (sarebbe la 2° proprietà)

Se è falso $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.

$M \geq x$ $\forall x \in (0,1)$ e $M < 1$




se $M < 1$ allora è o $0 < M$ oppure $M \leq 0$

se $0 < M < 1 \Rightarrow 0 < \frac{M+1}{2} < 1$

$M < 1 \Leftrightarrow \frac{M}{2} < \frac{1}{2}$ $\quad +\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{M}{2} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ho anche

$M < \frac{M+1}{2}$

$M = \frac{M}{2} + \frac{M}{2} < \frac{M}{2} + \frac{1}{2}$

Abbiamo trovato un numero $x_0 = \frac{M+1}{2}$ con la proprietà che $x_0 \in (0,1)$ e $M < x_0$ e quindi è falso che $M \geq x$ $\forall x \in (0,1)$ $(M > 0$

Se invece $M \leq 0$ allora ovviamente

$M \leq 0 < x$ $\forall x \in (0,1)$

Quindi avremo $x \leq M < x$ $\forall x \in (0,1)$

$\Rightarrow x < x$ $\forall x \in (0,1)$ Assurdo

Conclusione. Se $M \geq x$ $\forall x \in (0,1) \Rightarrow M \geq 1$.

Teor $\sup \mathbb{N} = +\infty$


Dim Supponiamo che $s := \sup \mathbb{N}$ esiste. Se $s \neq +\infty$ allora $s < +\infty$. Consideriamo $s - 1$.


Allora $\boxed{\exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n > s-1}$ $*$

Infatti se l'ultima frase fosse falsa allora sarebbe $n \leq s-1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow s-1 \geq s \Leftrightarrow 0 \geq 1$ falso

Concludiamo che $*$ è vera

$n > s-1 \Leftrightarrow n+1 > s$

$s < n+1 \leq s \Rightarrow s < s$ assurdo

$\boxed{s = +\infty}$

Corollario (Teor di Archimede)

$\forall$ coppia $x, y \in \mathbb{R}_+$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $nx > y$.

Dim $\underset{+\infty}{\sup \mathbb{N}} = +\infty \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \frac{y}{x} \Rightarrow nx > y$

(altrimenti $\underset{\substack{\| \\ +\infty}}{\sup \mathbb{N}} \leq \frac{y}{x}$)

Teor Dato un $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto esiste ed è unico un $\inf X \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ t.c.

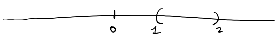
1) $\inf X \leq x \quad \forall x \in X$

2) $M \leq x \quad \forall x \in X \Rightarrow M \leq \inf X$

Notazione Dato $X \subseteq \mathbb{R}$ sia $-X = \{-x : x \in X\}$

Esercizio $\inf X = -\sup(-X)$

Ad esempio $X = (1, 2)$ $\quad \inf(1,2) = 1$



$-X = (-2, -1)$

$X = \{x : 1 < x < 2\}$

$-X = \{-x : x \in X\} = \{-x : 1 < x < 2\}$

$y = -x \quad = \{y : -2 < y < -1\}$

$\sup(-X) = -1 \qquad \inf X = -\sup(-X)$

Esercizio $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$

$\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \quad b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$

Teor Data una qualsiasi coppia di numeri reali $x_0 < y_0$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ t.c. $x_0 < q < y_0$

Funzioni Dati due insiemi $X$ e $Y$ una funzione $f: X \to Y$ da $X$ a $Y$ e' una "legge" che associa ad ogni elemento di $X$ un (e uno solo) elemento di $Y$.

Esempi 1) $f(x) = \sin x \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2) $Q(t)$ quantità di denaro con rivalutazione continua al 3%

$$Q(t) = e^{\frac{3}{100}t} Q_0$$

3) funzione costo $C(x)$ $\qquad x$ unità di modello

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$a$ i costi fissi

$bx$ i costi della materia prima.

$$f(x) = \log_7\left(\sqrt{x+1} - 1\right)$$

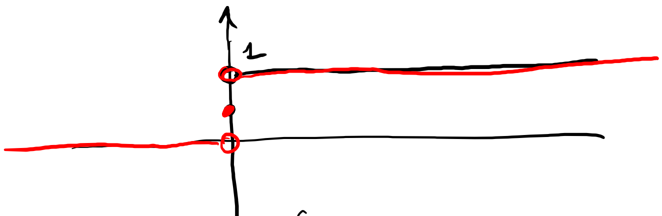
Dominio si usa il fatto che il $\log_7$ è definito in $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{\phantom{x}}$ è definito solo in $[0,+\infty)$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x+1} > 1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\cancel{1} > \cancel{1} \\ x \geq -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \iff \boxed{x > 0}$$

H di Heaviside Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$




$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

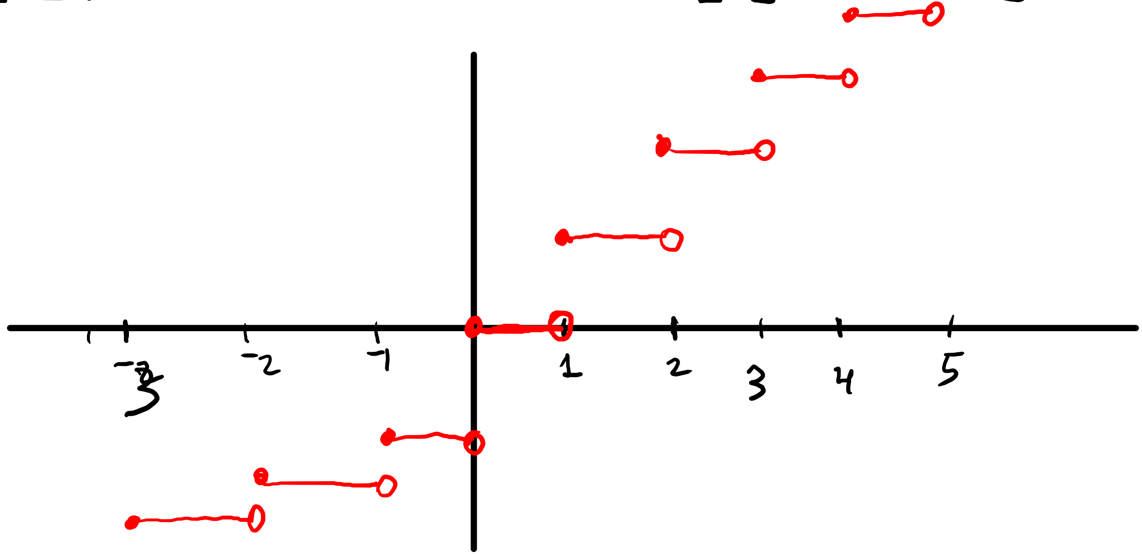
Esercizio esprimete l'una nell'altra sign(x) e H(x)

Funzione di Dirichlet $$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

funzione parte intero di x

$[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$[x] \leq x < [x] + 1$




$f : X \to Y$ il grafico $\Gamma_f$

$\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$