La logica sarà usare come input che sappiamo dell'esistenza dei bosoni massivi $W^\pm$ e Z, e gli step sono:

* calcolare scattering di bosoni massivi all'ordine leading (tree-level) in teoria perturbativa
* focalizzarsi su polarizzazioni esterne longitudinali
* imporre unitarietà dell'ampiezza di scattering

Vedremo che si pone un problema per l'unitarietà da cui le vie di uscita sono solo:

→ aggiungere H con gli accoppiamenti che abbiamo visto

→ approssimazione perturbativa si rompe

Queste erano le due opzioni possibili per un fisico teorico prima del 2012, ora sappiamo che la natura ha scelto la prima opzione!

Seguiamo Schwartz Cap. 29.

Prima di entrare nel vivo richiamiamo i concetti che servono

<u>Polarizzazioni</u> per <u>vettore</u> <u>massivo</u>: Weinberg vol I 5.3

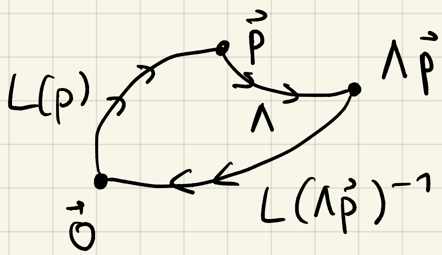
$$\underbrace{W^\mu(x)}_{\text{campo vettoriale massivo libero}} = \sum_\sigma \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\Big[u^\mu(\vec{p},\sigma)\,a(\vec{p},\sigma)\,e^{ip\cdot x} + v^\mu(\vec{p},\sigma)\,a^\dagger(\vec{p},\sigma)\,e^{-ip\cdot x}\Big]$$

assumiamo reale per semplicità

σ : indice della rappresentazione del piccolo gruppo, che usiamo per costruire la rappresentazione di Poincaré del campo; labella lo stato di spin: piccolo gruppo $= SO(3)$.

Gli operatori di creazione e distruzione trasformano come uno stato di singola particella:

$$U(\Lambda,b)\,a(\vec{p},\sigma)\,U^{-1}(\Lambda,b) = e^{i\Lambda p\cdot b}\sqrt{\frac{E_{\Lambda\vec{p}}}{E_{\vec{p}}}}\; D_{\sigma\bar{\sigma}}\big((L(\Lambda\vec{p})^{-1}\Lambda L(\vec{p}))^{-1}\big)\,a(\Lambda\vec{p},\bar{\sigma})$$



} trasformazione del piccolo gruppo $\equiv W(\Lambda,\vec{p})$

$u^\mu(\vec{p},\sigma)$ e $v^\mu(\vec{p},\sigma)$ sono "intertwiner": trasformano la rappresentazione del piccolo gruppo sull'indice σ a quelle di tutto Lorentz sull'indice μ del campo

$$u^\mu(\Lambda\vec p,\bar\sigma)\, D_{\bar\sigma\sigma}(W(\Lambda,\vec p)) = \sqrt{\frac{E_{\vec p}}{E_{\Lambda\vec p}}}\;\Lambda^\mu{}_\nu\, u^\nu(\vec p,\sigma)$$
$$v \qquad (\;\cdots\cdots\;)^* \qquad\qquad v$$

[Convinciti che questo assicura la corretta trasformazione del campo:

$$U(\Lambda,b)\,W^\mu(x)\,U(\Lambda,b)^\dagger = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\, W^\nu(\Lambda x + b)$$]

In particolare applicando a $u, v(\vec p=0,\sigma)$ un boost $L(\vec p)$ per andare a momento $\vec p$, troviamo che $W=\mathbb{1}$ e semplicemente:

$$\underset{v}{u^\mu}(\vec p,\sigma) = \left(\frac{m}{E_{\vec p}}\right)^{1/2} \underbrace{L(\vec p)^\mu{}_\nu}_{\text{boost di Lorentz da } \vec p=0 \text{ a } \vec p.}\, \underset{v}{u^\nu}(\vec 0,\sigma)$$

Restringendoci a $\vec p=0$ invece abbiamo solo trasformazioni del piccolo gruppo, rotazioni R, nel qual caso $W=R$.

Usando i generatori della rappresentazione:

$$u^\mu(\vec 0,\bar\sigma)\,\vec J_{\bar\sigma\sigma} = \vec J^\mu{}_\nu\, u^\nu(\vec 0,\sigma)$$
$$v \qquad (-\vec J_{\bar\sigma\sigma})^* \qquad\qquad v$$

$$\left(D = e^{-i\vec J\cdot\vec\omega}\;,\;\; \Lambda = e^{-i\vec J\cdot\vec\omega}\right)$$

Usando che $(J^k)^i{}_j = -i\epsilon_{ijk}$ e tutte le altre componenti di J^k sono 0, dall'eq. precedente troviamo che la rappresentazione $\vec{J}_{\sigma\bar\sigma}$ si divide in due blocchi:

$u^0(\vec{0},\sigma)$ è nella rappresentazione di spin $j=0$ di $SO(3)$: $\vec{J}_{\sigma\bar\sigma}=0$

$u^i(\vec{0},\sigma)$ è nella rappresentazione di spin $j=1$ di $SO(3)$: $(\vec{J}^2)_{\sigma\bar\sigma} = 2\,\delta_{\sigma\bar\sigma}$ (in generale $j(j+1)\,\delta_{\sigma\bar\sigma}$).

→ usiamo solo questa per descrivere un campo di spin 1

$j=1$ rappresentazione 3-dimensionale, possiamo labellare usando il valore del momento angolare $J^3_{\sigma\bar\sigma}$: $\sigma = -1, 0, +1$

$$u(\vec{0},0) = v(\vec{0},0) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\,\epsilon(\vec{0},0)$$

$$u(\vec{0},\pm1) = -v(\vec{0},\pm1) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\,\epsilon(\vec{0},\pm1)$$

applicando $J_1 \pm i J_2$

$$\boxed{\epsilon(\vec{0},0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \epsilon(\vec{0},\pm1) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\\pm i\\0\end{pmatrix}}$$

$$\epsilon^\mu(\vec{p},\sigma) = L^\mu{}_\nu(\vec{p})\,\epsilon^\nu(\vec{0},\sigma)$$

Se facciamo boost solo nella direzione 3 rispetto a cui abbiamo diagonalizzato $\vec{J}$, le polarizzazioni non cambiano perché sono $\perp$ alla direzione del boost mentre per 0 troviamo:

$$\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{L(\vec{p})} \begin{pmatrix} E_{\vec{p}} \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, \quad L(\vec{p}) = \begin{pmatrix} E_{\vec{p}}/m & 0 & 0 & p/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p/m & 0 & 0 & E_{\vec{p}}/m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \epsilon(\vec{p}, \pm) = \epsilon(\vec{0}, \pm), \quad \underbrace{\epsilon(\vec{p}, 0) = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ E_{\vec{p}} \end{pmatrix}}_{\text{parte spaziale } \propto \vec{p}\text{ : polarizzazione longitudinale}}$$

Più in generale, con $\vec{p} \neq 0$ è conveniente scegliere come componente di $\vec{J}$ da diagonalizzare quella lungo $\vec{p}$:

$$\underbrace{\epsilon(\vec{p}, \pm)}_{\frac{\vec{J}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \pm 1} \equiv \epsilon_\pm(\vec{p}), \quad \boxed{\epsilon(\vec{p}, 0) = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} |\vec{p}| \\ E_{\vec{p}} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} \equiv \epsilon_L(\vec{p})}$$

polarizzazioni trasverse: solo spaziali, base ortonormale $\perp$ a $\vec{p}$.

$\frac{\vec{J}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = 0$ polarizzazione longitudinale

Nota che: $\begin{cases} \epsilon_T^\mu p_\mu = 0 \\ \epsilon_L^\mu p_\mu = 0 \end{cases}$

$$\epsilon_i \cdot \epsilon_j^* = -\delta_{ij}$$

$i, j = \pm, L$

Nel limite di alte energie: $E_{\vec{p}} \sim |\vec{p}| \gg m$

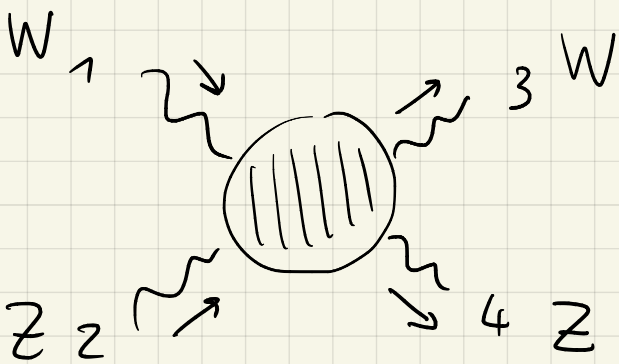
$$\epsilon^{\mu}_{L}(\vec{p}) \sim \frac{1}{m}\begin{pmatrix} E_{\vec{p}} \\ \vec{p} \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{m}{E_{\vec{p}}}\right) = \frac{1}{m} p^{\mu} + \mathcal{O}\left(\frac{m}{E_{\vec{p}}}\right)$$

Queste è la proprietà fondamentale delle polarizzazione longitudinale che dà luogo al bound, il fatto che le componenti crescono nel limite di alte energie. Per semplificare il conto potremmo voler usare solo: $? \; \epsilon^{\mu}_{L}(\vec{p}) = \frac{1}{m} p^{\mu} \; ?$ Problema: non rispetta

$p \cdot \epsilon = 0$, non è una valida polarizzazione per spin 1.

Quello che faremo è aggiungere a $\frac{1}{m} p^{\mu}$ un termine che dipende dalla cinematica in modo da assicurare $\epsilon \cdot p = 0$, tenere lo sviluppo di ϵ_L vero e proprio complicherebbe il calcolo.

Per la nostra applicazione consideriamo un esperimento di scattering con 4 vettori con polarizzazione L:



$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$

Nota che $t = 2 m_W^2 - 2 p_1 \cdot p_3 = 2 m_W^2 - 2 p_2 \cdot p_4$

Quindi una scelta di polarizzazione che ha la stessa crescita e rispetta $\epsilon \cdot p = 0$ è:

$$\epsilon_1^\mu = \frac{p_1^\mu}{m_W} + \frac{2 m_W}{t - 2m_W^2} p_3^\mu \,, \quad \epsilon_3^\mu = \frac{p_3^\mu}{m_W} + \frac{2 m_W}{t - 2m_W^2} p_1^\mu$$

$$\epsilon_2^\mu = \frac{p_2^\mu}{m_Z} + \frac{2 m_Z}{t - 2m_Z^2} p_4^\mu \,, \quad \epsilon_4^\mu = \frac{p_4^\mu}{m_Z} + \frac{2 m_Z}{t - 2m_Z^2} p_2^\mu .$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{m}{E_{\vec{p}}}\right)$$