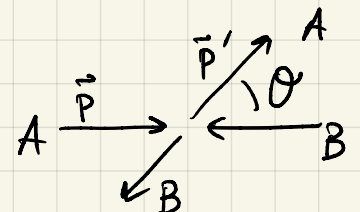


LEZIONE 4

Altro elemento che ci serve per derivare il bound

Unitarietà dello scattering:  centro di massa

$$\sigma_{\text{tot}}(AB \rightarrow AB) = \frac{1}{32\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \int d\cos\theta |M(AB \rightarrow AB; \theta, s)|^2$$

angolo di scattering

M : ampiezze di scattering, è un elemento di matrice $S = 1 + iT$

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) M(i \rightarrow f)$$

$$S^\dagger S = 1 \Rightarrow i(T^\dagger - T) = T^\dagger T \quad \text{vincolo non lineare su } T$$

Prendendo l'elemento di matrice tra $\langle f |$ e $|i\rangle$ e inserendo un sistema completo tra T^\dagger e T si ottiene:

$$\begin{aligned} & \text{Im} M(AB \rightarrow AB \text{ a } \theta=0) \\ &= 2 E_{\text{CM}} |\vec{p}| \sum_X \sigma_{\text{tot}}(AB \rightarrow X) \end{aligned}$$

Da questo si deriva la disuguaglianza:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Im } M(AB \rightarrow AB) \text{ a } \theta = 0 \\ \geq 2 E_{\text{CM}} |\vec{p}| \sigma_{\text{tot}}(AB \rightarrow AB) \end{aligned}}$$

che coinvolge solo $M(AB \rightarrow AB)$.

Possiamo espandere in un sistema completo:

$$M(\theta, s) = 16\pi \sum_{j=0}^{\infty} a_j(s) (2j+1) P_j(\cos \theta)$$

normalizzazione
convenzionale

coefficiente d'onde parziale

$P_j(\cos \theta)$: polinomio di Legendre, soddisfa

$$P_j(1) = 1, \quad \int_{-1}^{+1} P_j(\cos \theta) P_k(\cos \theta) d\cos \theta = \frac{2}{2j+1} \delta_{jk}$$

Sostituendo nella disuguaglianza:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \text{Im}(a_j) \geq \frac{2|\vec{p}|}{E_{\text{CM}}} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) |a_j|^2$$

Significato fisico di $a_j(s)$:

lo stato delle due particelle può essere

caratterizzato completamente dall'energia totale s e dal momento angolare orbitale (j, m) , invece che dai due momenti.

In questa base si trova:

$$\langle s'; m'; j'; \lambda'_A, \lambda'_B | T | s; m; j; \lambda_A, \lambda_B \rangle$$

$$= \delta(s-s') \delta_{mm'} \delta_{jj'} T_{\lambda_A, \lambda_B; \lambda'_A, \lambda'_B}^j(s)$$

$\lambda \rightarrow$ elicità delle particelle esterne

Facciamo il cambio di base:

$$\mathcal{M} = \langle \vec{P}'_A, \vec{P}'_B; \lambda'_A, \lambda'_B | T | \vec{P}_A, \vec{P}_B; \lambda_A, \lambda_B \rangle$$

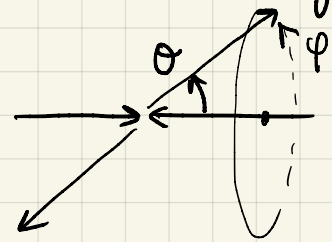
set completo: $\sum_{m, j} |m, j; \lambda, \bar{\lambda}\rangle \langle m, j; \lambda, \bar{\lambda}|$

$$= 16\pi \sum_j (2j+1) T_{\lambda_A, \lambda_B; \lambda'_A, \lambda'_B}^j(s) \mathcal{D}_{\lambda_A - \lambda_B, \lambda'_A - \lambda'_B}^j(\theta, \varphi)$$

rimane una sola

somma grazie alle $\delta_{jj'}$, contrazione degli m da $2j+1$

D è una funzione completamente fissata dalle simmetrie rotazionale (funzione di Wigner). Nota che in generale D , e quindi M , dipende anche dall'angolo azimutale del momento:



Specificando elicità 0 come nel caso di nostro interesse: $D_{0;0}^j(\theta, \varphi) = P_j(\cos \theta)$

$$\Rightarrow a_j(s) = T_{00;00}^j(s)$$

Dunque $a_j(s)$ stesso si può interpretare come elemento di matrice T in una certa base.

L'unitarietà vale in qualsiasi base per gli stati estermi e pertanto la disuguaglianza:

$$\text{Im}(a_j) \geq \frac{2|\vec{p}|}{E_{\text{CM}}} |a_j|^2$$

vale per ogni j , non solo dentro $\sum_j (2j+1)$.

Se lo scattering è solo elastico, non ci sono altri stati finali oltre a AB: la disuguaglianza $\sqrt{4}$

\bar{e} saturate. Inoltre nel limite $E_{cm} \gg m_{A,B}$ abbiamo che $2|\vec{p}|/E_{cm} \rightarrow 1$ e quindi:

scattering elastico
 $E_{cm} \gg m_{A,B}$

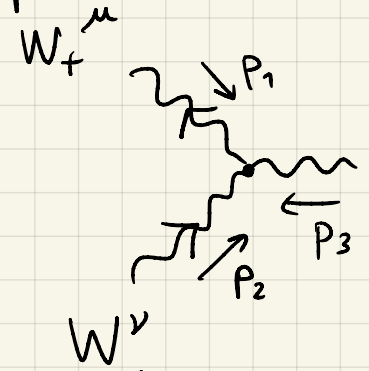
$$\boxed{\text{Im}(a_j) = |a_j|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{|a_j| \leq 1}$$

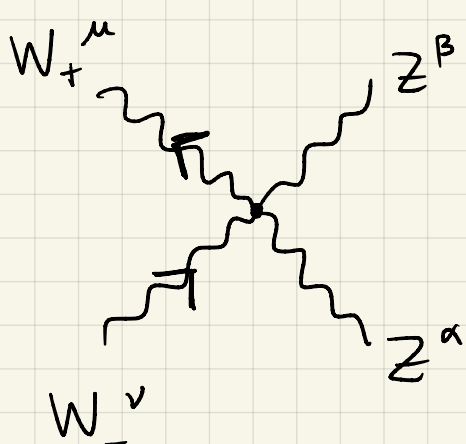
Ora siamo pronti per fare il calcolo:

$$i M(W_L^+(p_1) Z_L(p_2) \rightarrow W_L^+(p_3) Z_L(p_4))$$

Diagrammi che contribuiscono al tree-level:
 possiamo usare i vertici (vedi L (29.3) di Schwartz)



$$Z^{\lambda} = -ie \cot \theta_w \left[g^{\mu\nu} (p_1 - p_2)^{\lambda} + g^{\nu\lambda} (p_2 - p_3)^{\mu} + g^{\lambda\mu} (p_3 - p_1)^{\nu} \right]$$



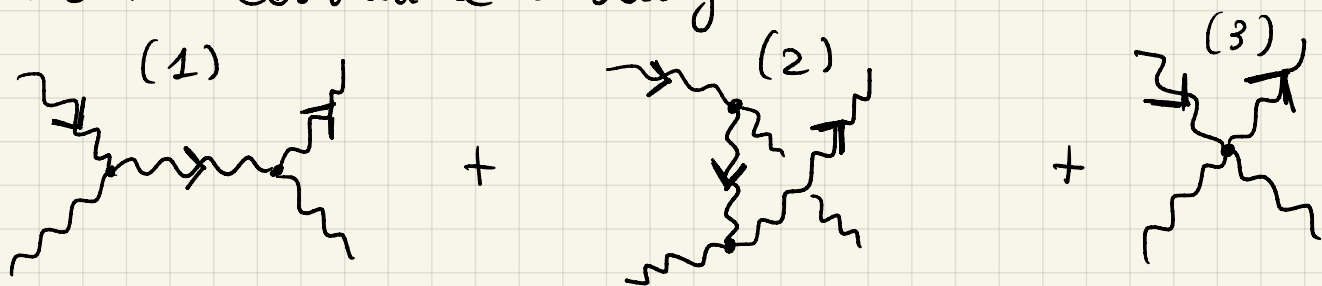
$$= ie^2 \cot^2 \theta_w \left[g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - 2g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \right]$$

Inoltre abbiamo il seguente propagatore per il bosone massivo:

$$W_{\mu}^{-} \xrightarrow{k} W_{\nu}^{-} = \frac{i}{k^2 - M_W^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{M_W^2} \right)$$

(analogo per Z ma non ci servirà).

Possiamo costruire i diagrammi:



In tutti i casi sulle zampe esterne dobbiamo contrarre con i vettori di polarizzazione longitudinali.

I diagrammi (1) e (2) sono troppo lunghi da calcolare in classe, vedi (29.22) e (29.23) di Schwartz. Calcoliamo (3):

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram (3): } \mu \text{ } \nu \text{ } \alpha \text{ } \beta \text{ } p_1 \text{ } p_2 \text{ } p_3 \text{ } p_4 \\
 & = i e^2 \cot^2 \theta_w \left(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - 2 g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right) \epsilon_1^{\mu} \epsilon_2^{\nu} \epsilon_3^{\alpha*} \epsilon_4^{\beta*}
 \end{aligned}$$

$$= i e^2 \cot^2 \theta_w \left(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^* + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4^* \epsilon_2 \cdot \epsilon_3^* - 2 \epsilon_1 \cdot \epsilon_3^* \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^* \right)$$