$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = \underbrace{\frac{p_1 \cdot p_2}{m_W m_Z}}_{\mathcal{O}(E_p^2/m^2)} + \underbrace{\frac{1}{m_W}\frac{2m_Z}{t-2m_Z^2}\, p_1 \cdot p_4 + \frac{1}{m_Z}\frac{2m_W}{t-2m_W^2}\, p_2 \cdot p_3}_{\mathcal{O}(1)} + \dots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(s-m_W^2-m_Z^2)}{m_W m_Z} - \frac{1}{m_W}\frac{2m_Z}{2m_W^2-s-u}\,\frac{1}{2}(u-m_W^2-m_Z^2)$$

$$- \frac{1}{m_Z}\frac{2m_W}{2m_Z^2-s-u}\,\frac{1}{2}(u-m_W^2-m_Z^2) + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{s}{m_W m_Z} - \frac{1}{2}\frac{m_W^2+m_Z^2}{m_Z m_W} + \frac{m_Z}{m_W} + \frac{m_W}{m_Z}\,\frac{u}{u+s} + \dots$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{s}{m_W m_Z}}_{\mathcal{O}(E_p^2/m^2)} + \underbrace{\frac{m_W^2+m_Z^2}{2m_Z m_W}\,\frac{u-s}{u+s}}_{\mathcal{O}(1)} + \dots$$

Abbiamo usato $s=(p_1+p_2)^2$, $t=(p_1-p_3)^2$, $u=(p_1-p_4)^2$
e $s+t+u = 2m_W^2+2m_Z^2$.

$\epsilon_3^* \cdot \epsilon_4^* = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2$ stessi prodotti scalari

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_4^* = \frac{p_1 \cdot p_4}{m_W m_Z} + \frac{1}{m_W}\frac{2m_Z}{t-2m_Z^2}\, p_1 \cdot p_2 + \frac{1}{m_Z}\frac{2m_W}{t-2m_W^2}\, p_4 \cdot p_3 + \dots$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u-m_W^2-m_Z^2}{m_W m_Z} + \frac{1}{m_W}\frac{2m_Z}{-s-u}\,\frac{s}{2} + \frac{1}{m_Z}\frac{m_W}{-s-u}\,\frac{s}{2} + \dots$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u}{m_W m_Z} + \frac{m_W^2+m_Z^2}{2m_W m_Z}\,\frac{u-s}{u+s} + \dots$$

$$\epsilon_2\cdot\epsilon_3^* = \epsilon_1\cdot\epsilon_4^*$$

$$\epsilon_1\cdot\epsilon_3^* = \frac{p_1\cdot p_3}{m_w^2} + \frac{2}{t-2m_w^2}\left(p_3^2+p_1^2\right) + \dots$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t-2m_w^2}{m_w^2} + \frac{4\,m_w^2}{t-2m_w^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{s+u-2m_z^2}{m_w^2} + \dots$$

$$= \frac{s+u}{2m_w^2} - \frac{m_z^2}{m_w^2} + \dots$$

$$\epsilon_2\cdot\epsilon_4^* = \frac{p_2\cdot p_4}{m_z^2} + \frac{2}{t-2m_z^2}\left(p_4^2+p_2^2\right) + \dots$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t-2m_z^2}{m_z^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{s+u-2m_w^2}{m_z^2} + \dots = \frac{s+u}{2m_z^2} - \frac{m_w^2}{m_z^2}$$

Mettendo assieme:

$$i e^2\cot\theta_w^2\Bigg(\left(\frac{s}{2m_w m_z} + \frac{m_w^2+m_z^2}{2m_w m_z}\,\frac{u-s}{u+s}\right)^2$$

$$+\left(\frac{u}{2m_w m_z} - \frac{m_w^2+m_z^2}{2m_w m_z}\,\frac{u-s}{u+s}\right)^2 - 2\left(\frac{s+u}{2m_w^2}-\frac{m_z^2}{m_w^2}\right)\left(\frac{s+u}{2m_z^2}-\frac{m_w^2}{m_z^2}\right)\Bigg)$$

$$+\dots$$

$$= i e^2\cot\theta_w^2\Bigg(\frac{s^2}{4m_w^2m_z^2} + 2\,\frac{s}{2m_w m_z}\,\frac{m_w^2+m_z^2}{2m_w m_z}\,\frac{u-s}{u+s}$$

$$+\frac{u^2}{4m_w^2m_z^2} - 2\,\frac{u}{2m_w m_z}\,\frac{m_w^2+m_z^2}{2m_w m_z}\,\frac{u-s}{u+s} - 2\,\frac{(s+u)^2}{4m_w^2m_z^2}$$

$$+ (s+u)\Big(\underbrace{\frac{1}{m_W^2} + \frac{1}{m_Z^2}}_{\frac{m_W^2+m_Z^2}{m_W^2 m_Z^2}}\Big)\Big) + \dots$$

$$= \frac{i e^2 \cot\theta_w^2}{4 m_W^2 m_Z^2}\Big(-s^2 - u^2 - 4su + \frac{m_W^2+m_Z^2}{u+s}\big(2su - 2s^2$$

$$-2u^2 + 2su + 4s^2 + 4u^2 + 8su\big)\Big) + \dots$$

$$= \frac{i e^2 \cot\theta_w^2}{4 m_W^2 m_Z^2}\Big(-s^2 - u^2 - 4su + 2\,\frac{m_W^2+m_Z^2}{u+s}\big(s^2+u^2+6su\big)\Big) + \dots$$

✓ eq. (29.24) di Schwartz.

Vediamo che la risposta ha un termine di ordine $\mathcal{O}(E_{\vec{p}}^4/m^4)$ dominante e un altro termine sotto-dominante che cresce con l'energia $\mathcal{O}(E_{\vec{p}}^2/m^2)$.

Sommando (1)+(2)+(3) il termine dominante si cancella ma rimane comunque la crescita come $\mathcal{O}(E_{\vec{p}}^2/m^2)$:

$$\mathcal{M}_{tot}(W_L Z_L \to W_L Z_L) \overset{(1)+(2)+(3)}{=} -\frac{m_Z^2}{4 m_W^4}\, e^2 \cot\theta_w^2 (s+u) + \dots$$

$$= \frac{t}{v^2} + \dots$$

abbiamo usato: $m_W = m_Z \cos\theta_W$

$$v = \frac{2 m_W \sin\theta_W}{e}$$

Decomposizione in onde parziali:

$$t = -\frac{1}{2} s(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad a_0(s) = -\frac{s}{32\pi v^2} \quad , \quad a_1(s) = \frac{s}{96\pi v^2}$$

$$a_j(s) = 0 \quad , \quad j > 1.$$

$\Rightarrow$ <u>Violazione di unitarietà (perturbativa)</u>
<u>per $|a_0(s)| \gtrsim 1$ ovvero: $E > \sqrt{32\pi}\, v \approx 2{,}5$ TeV</u>

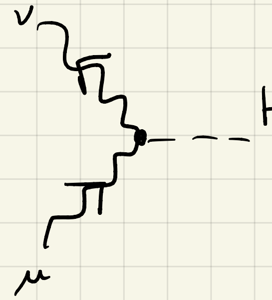
Bound più raffinato includendo tutti i canali: violazione per $E > 800$ GeV.

Possibile salvezza: i diagrammi oltre tree-level potrebbero dare un contributo dello stesso ordine in $E_{\vec{p}}/m$ e cancellare la crescita dominante.

Se i diagrammi a loop più alti danno contributi dello stesso ordine dei leading, la teoria perturbativa non è più valida: fisica fortemente accoppiata a quelle scale.

La natura però sceglie un'altra possibilità: un campo scalare che si accoppia a W e Z.

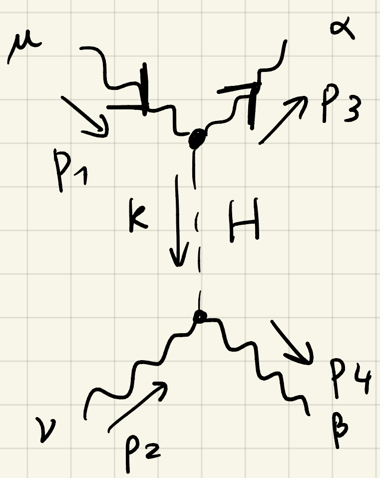
È l'Higgs H. I vertici sono:



$$= i \, \frac{2 m_W^2}{v} \, g^{\mu\nu}$$

$$= i \, \frac{2 m_Z^2}{v} \, g^{\mu\nu}$$

Diagramma aggiuntivo che contribuisce all'ampiezza:



$$= \epsilon_1^{\mu} \epsilon_2^{\nu} \epsilon_3^{\alpha *} \epsilon_4^{\beta *} \frac{i}{k^2 - m_H^2} \left(- \frac{4 m_W^2 m_Z^2}{v^2} \right) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}$$

$$= -i \, \frac{1}{t - m_H^2} \, \frac{4 m_W^2 m_Z^2}{v^2} \, \epsilon_1 \cdot \epsilon_3^* \; \epsilon_2 \cdot \epsilon_4^*$$

$$= -i \, \frac{1}{t - m_H^2} \, \frac{\cancel{4 m_W^2 m_Z^2}}{v^2} \, \frac{1}{\cancel{2}} \frac{t - 2 m_W^2}{\cancel{m_W^2}} \, \frac{1}{\cancel{2}} \frac{t - 2 m_Z^2}{\cancel{m_Z^2}}$$

$$= -i \, \frac{t}{v^2} + \dots = i \mathcal{M}_H \Rightarrow \delta \mathcal{M}_{tot} = - \frac{t}{v^2}$$

Esattamente il contributo che serviva per cancellare la crescita dell'ampiezza!

Nota che questo funziona solo se il contributo di H ha la stessa crescita con E nel regime in cui abbiamo la violazione. Questo richiede che la massa di H non possa essere più grande o dell'ordine di questa scala, altrimenti il contributo di H sarebbe soppresso da m_H.

$\Rightarrow$ Unitarietà dà bound alla massa di H.

Includendo tutti i canali si trova:

$$m_H \leq \sqrt{\frac{16\pi}{3}}\, v \simeq 1\,\text{TeV}$$

Lee - Quigg - Thacker bound.