5/10/2021

I NUMERI COMPLESSI

Motivazione: i numeri complessi "nascono", storicamente per poter risolvere l'equazione polinomiale

$$x^2=-1$$

È ben risaputo che l'equazione di cui sopra non ammette soluzioni appartenenti ai numeri reali.

Definiamo dunque con i, che denoteremo d'ora in avanti come unità immaginaria un elemento tc.

$$i^2=-1$$

"Problematica" notiamo subito che se $i^2=-1$ allora si ha che

$$(-i)^2=(-1)^2\, i^2 = -1$$

$\rightsquigarrow$ Molteplicità delle radici complesse.

Def Sia i l'unità immaginaria un numero complesso z è un'espressione della forma

$$z=x+iy \quad , \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

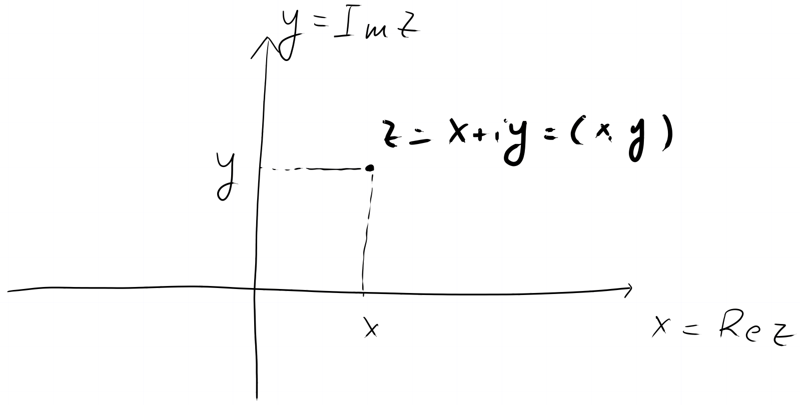
x è detta parte reale di z e può essere denotata con $x = \operatorname{Re} z$

y è detta parte immaginaria di z e può essere denotata con $y = \operatorname{Im} z$

L'insieme dei numeri complessi viene denotato con il simbolo $\mathbb{C}$ che è definito come

$$\mathbb{C}=\{z : z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

I numeri complessi ammettono un'identificazione biunivoca con il piano reale $\mathbb{R}^2$



Def dato un numero complesso $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiamo il complesso coniugato di z come

$$\bar{z} = z^* = x - iy = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z .$$

Def Sia $z \in \mathbb{C}$ definiamo il modulo di z come la quantità

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

NB il modulo di z è sempre una quantità reale e nonnegativa

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \geq 0$$

NB Notiamo come il modulo di z non sia null'altro che la norma euclidea del vettore $(x\, y) \in \mathbb{R}^2$.

Numeri complessi in forma trigonometrica

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$, consideriamo l'identificazione canonica

$$z \simeq (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

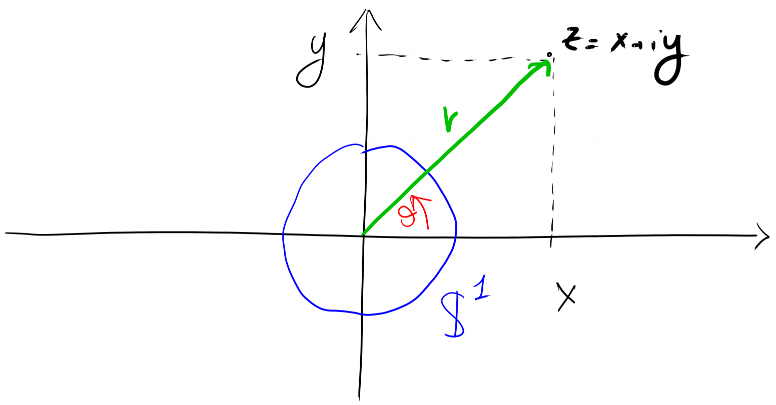
Da ciò che sappiamo dal corso di Analisi 2 $\exists! \ (r,\vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi)$ t.c.

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$$

ed in particolare possiamo calcolare r e ϑ come funzioni di x ed y

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vartheta = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{se } x \neq 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ ed } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ ed } y < 0 \\ \text{indefinito} & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Possiamo dunque scrivere

$$z = x + iy = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

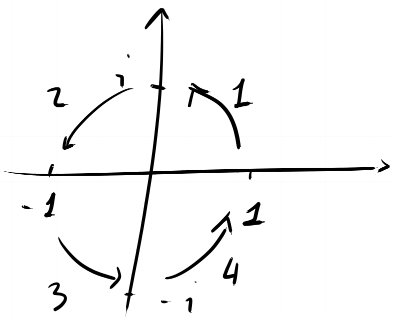
L'espressione di cui sopra è conosciuta come formulazione trigonometrica di un numero complesso, r è detto il modulo di z, $|z| = r$, mentre ϑ è l'argomento di z e lo indichiamo con $\vartheta = \arg z$

NB l'argomento di un numero complesso è univocamente definito sse ci restringiamo a considerare $\vartheta \in [0, 2\pi)$, altrimenti se ammettiamo che ϑ sia un valore reale qualsiasi l'argomento è dunque definito modulo rotazioni di $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

L'esponenziale complesso

Notiamo dapprima le seguenti identità

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$



Ne deduciamo dunque che $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i$$

[Calcolo informale]

Sia $\vartheta \in \mathbb{R}$, consideriamo l'espressione

$$e^{i\vartheta} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{(i\vartheta)^m}{m!}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\vartheta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\vartheta)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(i)^{2n} = [(i)^2]^n = (-1)^n$$

$$(i)^{2n+1} = (i)^{2n}\, i = i(-1)^n$$

$$= \underbrace{\sum_n \frac{(-1)^n \vartheta^{2n}}{(2n)!}}_{=\cos\vartheta} + i \underbrace{\sum_n \frac{(-1)^n \vartheta^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=\sin\vartheta}$$

$$= \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

$\Rightarrow$ Ogni elemento di $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ può essere scritto come $z = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$

<u>OSS</u> $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\vartheta}} = \overline{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$

$$= \cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta) = e^{-i\vartheta}$$

<u>ES</u> Dimostrare che $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$

$$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}, \quad \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

Potenze e radici di un numero complesso

Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ sappiamo che $\exists! (r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ tc

$$z = r e^{i\vartheta}$$

dunque $\forall n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$z^n = (r e^{i\vartheta})^n = r^n e^{in\vartheta}$$

Sia ora $n \in \mathbb{N}$, vogliamo calcolare la radice n-esima di z, ossia vogliamo determinare un $w \in \mathbb{C}$ tc

$$w^n = z.$$

Sia dunque $w = s e^{i\varphi}$, abbiamo dunque che

$$w^n = s^n e^{in\varphi} = z = r e^{i\vartheta}$$

$$\Rightarrow \quad s^n = r$$

$$n\varphi = \vartheta + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightsquigarrow \varphi = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k}{n}\pi \quad , \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

Def Sia $z = r e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ l'insieme delle radici n-esime di z è dato dall'insieme

$$\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \quad t.c.$$

$$|w_i| = r^{1/n} \quad , \quad \arg w_i = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2i}{n}\pi \quad , \quad i = 1, \dots, n .$$

Def [esponenziale complesso] $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ definiamo

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\in \mathbb{R}_+} \underbrace{e^{iy}}_{\in S^1}$$

Def [funzioni trigonometriche complesse] $\forall z \in \mathbb{C}$ definiamo

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Logaritmo di un numero complesso

Sia $z \in \mathbb{C}$, sappiamo che $\exists\, \vartheta \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$z = |z| e^{i\vartheta} = |z| e^{i(\vartheta + 2k\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \vartheta = \arg z$$

Calcoliamo ora

$$\log z = \log\left(|z| e^{i(\vartheta + 2k\pi)}\right)$$
$$= \log|z| + i\vartheta + i\,2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\Longrightarrow$ ⚠ Il logaritmo complesso non è univocamente definito

Funzioni di variabili reali a valori complessi

Def Una funzione $f : I (\subseteq \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$, con I intervallo è del tipo

$$f(x) = u(x) + i\, v(x),$$

con $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali a valori reali.

Tramite l'identificazione canonica $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ f è identificabile con una curva piana

$$f(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I$$

Si ha

- f è continua $\Longleftrightarrow$ u, v sono continue
- f è derivabile $\Longleftrightarrow$ u, v sono derivabili e

$$f'(x) = u'(x) + i\, v'(x)$$

- f è integrabile in $[a,b] \subseteq I \longleftrightarrow u$ e v lo sono

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

Funzioni Periodiche

- Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è T-periodica con periodo $T>0$ se
$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

- Si definiscono: $1/T$ frequenza, e $\omega = 2\pi/T$ frequenza angolare

- Una funzione T-periodica è individuale univocamente dalla restrizione
$$f\Big|_{[\alpha, \alpha+T)} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \text{ fissato}$$

OSS Consideriamo la funzione
$$g(x) = \sin(2x)$$
Notiamo che $\sin(2x) = \sin(2x+\pi)$

Tuttavia è pur vero che $\sin(2x) = \sin(2x+2\pi)$

allo stesso modo $\sin(2x) = \sin(2x+k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

Sia ora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione generica T-periodica $\leadsto$ f è kT-periodica $\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Esempi

- $f(x) = \sin(\pi x)$ è periodica di periodo 2
- $f(x) = \arcsin(\sin x)$ è periodica di periodo 2π
- $f(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$ —— // ——