6/10/2021

- M. Codegone, Metodi matematici per l'ingegneria
- Saff, Snider, Fundaments of Complex Analysis with applications to Engineering....

Ieri (5/10):

- Numeri complessi come estensione di $\mathbb{R}$
- formulazione trigonometrica di un NC
- formulazione exp di un NC
- Funzioni (radici / fz trig / exp) complesse
- Fz periodiche

Es Fz periodiche : $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, e^{ix} etc....

1) $$f(x) = \underbrace{\sin(x/2)}_{=f_1(x)} + \underbrace{\cos(2x)}_{=f_2(x)}$$

Sappiamo che f_1 è 4π - periodica
" f_2 è π - periodica

Tuttavia utilizzando la definizione stessa di periodicità deduciamo che f_2 è 4π-periodica

$$\boxed{f_2(x+4\pi)} = f_2(x+3\pi+\pi) \underset{\substack{\uparrow \\ f_2 \text{ è } \pi\text{-periodica}}}{=} f_2(x+3\pi) = \dots = \boxed{f_2(x)}$$

Otteniamo dunque che f_2 soddisfa la condizione di 4π - periodicità

$\Rightarrow f = f_1 + f_2$ è 4π-periodica

2) Siano $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, considero

$$f(x) = \underbrace{e^{iq_1 x}}_{=f_1(x)} + \underbrace{e^{iq_2 x}}_{=f_2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

f è periodica? se si, di che periodo?

$$\begin{aligned} f_i\left(x + 2\pi/q_i\right) &= \exp\left(i\left(x + \frac{2\pi}{q_i}\right)q_i\right) \\ &= \exp\left(ixq_i + i\frac{2\pi}{\cancel{q_i}}\cancel{q_i}\right) \\ &= e^{ixq_i} \cdot \underbrace{e^{i2\pi}}_{=1} = e^{ixq_i} \\ &= f_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow f_i$, $i=1,2$ è $2\pi/q_i$-periodica

Se scegliamo dunque

$$T = \mathrm{mcm}\left\{\frac{2\pi}{q_1}, \frac{2\pi}{q_2}\right\},$$

e tale valore esiste e si può calcolare esplicitamente grazie all'ipotesi $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, otteniamo che f è T-periodica

3) Supponiamo $f(x) = e^{2\pi i\alpha x} + e^{2\pi i q x}$, $q \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Argomentando come nel punto 2 possiamo definire

$f_1(x) = e^{2\pi i\alpha x}$ è $1/\alpha$-periodica

$f_2(x) = e^{2\pi i q x}$ è $1/q$-periodica

tuttavia siccome $q \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non esiste un multiplo intero comune ai 2 $\Rightarrow f$ <u>non</u> è periodica

Energia di una funzione periodica

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica, localmente integrabile in $\mathbb{R}$
si pone

$$\|f\|_2^2 = \|f\|_{L^2}^2 = \int_0^T |f(x)|^2 \, dx = \int_0^T u^2(x) + v^2(x) \, dx$$

$$= \int_\alpha^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Tale quantità ($\|f\|_2$) è denotata come energia o norma L^2 della funzione f.

Fissiamo ora un periodo $T>0$ e poniamo $\omega = 2\pi/T$

Def Armoniche elementari

Sono funzioni del tipo

1) A_0, $A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)$ o $A_n \sin(n\omega x + \varphi_n)$
dove $n \in \mathbb{N}^*$, $A_0 \in \mathbb{R}$, $A_n \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_n \in (-\pi, \pi)$

2) $a_0/2$, $a_n \cos(n\omega x)$, $b_n \sin(n\omega x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$

fz $\mathbb{R}$ di var $\mathbb{R}$

3) $c_n e^{in\omega x}$, $n \in \mathbb{Z}$, $c_n \in \mathbb{C}$ armoniche complesse

Relazioni tra armoniche elementari

Vogliamo dimostrare che le tre famiglie di armoniche elementari sono equivalenti, ossia una particolare scelta dei coefficienti fa sì che possiamo esprimere una famiglia di armoniche come combinazione lineare (finita) di armoniche di un'altra famiglia

In particolare proveremo che

$$1) \iff 2) \iff 3)$$

$1) \Rightarrow 2)$ $A_n \cos(n\omega x + \varphi_n) = \underbrace{A_n \cos\varphi_n}_{a_n} \cos(n\omega x) - \underbrace{A_n \sin\varphi_n}_{b_n} \sin(n\omega x)$

(*)

$$= a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

Proviamo ora che $2) \Rightarrow 1)$.

Da (*) ne deduco che dati a_n e b_n cerco degli A_n e φ_n t.c.

$$\begin{cases} a_n = A_n \cos\varphi_n \\ b_n = -A_n \sin\varphi_n \end{cases}$$

$$a_n^2 + b_n^2 = (A_n \cos\varphi_n)^2 + (A_n \sin\varphi_n)^2$$

$$= A_n^2 \implies A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$-\operatorname{tg}\varphi_n = b_n / a_n$$

Proviamo ora l'equivalenza $2) \iff 3)$

Proviamo che $2) \Rightarrow 3)$

$$a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

$$(**) \qquad = \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - i b_n)}_{= c_n} e^{in\omega x} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + i b_n)}_{c_{-n}} e^{-in\omega x}$$

3) => 2)

Data $(**)$ ed una sequenza complessa $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ cerco $(a_n, b_n)_n$ che soddisfino il sistema lineare

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

Energia di un'armonica elementare

$$\|f\|_2^2 = \int_0^T |f(x)|^2 dx$$

Caso reale

1) $$\|A_0\|_{L^2}^2 = \int_0^T A_0^2 \, dx = T A_0^2$$

$$\|A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)\|_2^2 = A_n^2 \int_0^T \cos^2(n\omega x + \varphi_n)\, dx$$

$$= \frac{A_n^2}{n\omega} \int_{\varphi_n}^{\varphi_n + 2\pi n} \cos^2 t \, dt = A_n^2 \frac{T}{2\pi n} n\pi = A_n^2 \, T/2$$

2) $$\left\|\frac{1}{2} a_0\right\|_2^2 = \frac{T}{4} a_0^2$$

$$\|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\|_{L^2}^2 = \frac{T}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

3) $\|c_0\|_2^2 = \int_0^T |c_0|^2 dx = T\,|c_0|^2$

$$\|c_n e^{in\omega x}\|_2^2 = \int_0^T |c_n e^{in\omega x}|^2 dx$$

$$= \int_0^T |c_n|^2 dx = T\,|c_n|^2$$

Polinomi trigonometrici

Def Chiamiamo polinomio trigonometrico di ordine $N \in \mathbb{N}$ ognuna delle seguenti espressioni:

1) $P_N(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(n\omega x + \varphi_n)$

2) $P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right]$

3) $P_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$

Energia di un PT

Caso reale: $\|P_N\|_2^2 = T A_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{N} A_n^2$

$$= \frac{T}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \right)$$

Caso complesso: $\|P_N\|_2^2 = T \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$

Serie trigonometriche

Def Una serie trigonometrica è un'espressione della forma

1) $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right), \quad a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

2) $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad c_n \in \mathbb{C}$$

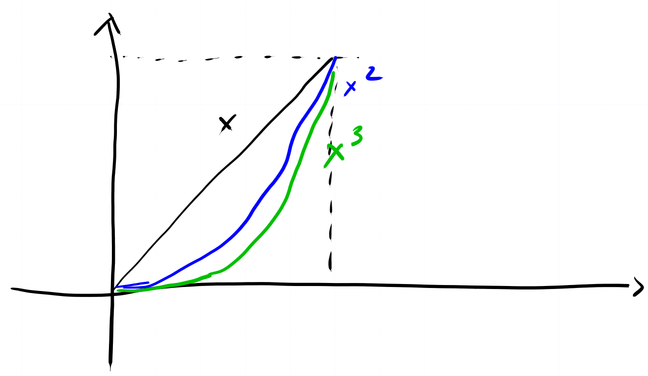
Def La ridotta N-esima di 1) è il PT

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

La ridotta N-esima di 2) è il PT

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$$

Es $f_n(x) = x^n$ in $[0, 1]$



Puntualmente $\forall x \in [0, 1)$ abbiamo che

$$\lim_n x^n = 0$$

tuttavia se $x = 1$ $\quad x^n \longrightarrow 1$

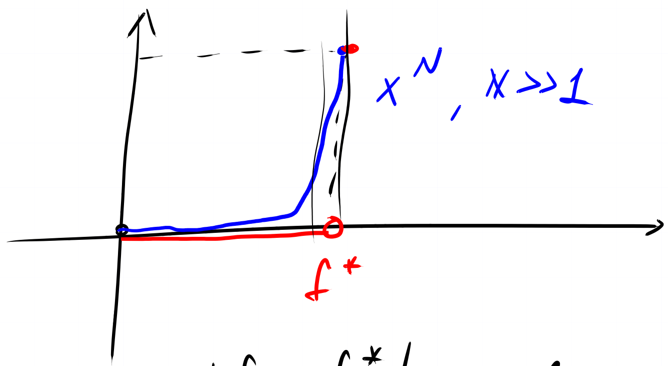
Puntualmente la successione $(f_n)_n$ converge alla funzione $f^*(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Consideriamo la norma $|\cdot|_\infty$ in $[0,1]$

Calcoliamo adesso

$$\lim_{n \to \infty} |f_n - f^*|_\infty$$

Ogni funzione f_n è continua in $[0,1]$, vale 0 in 0 ed 1 in 1 e dunque assume tutti i valori intermedi in $[0,1]$



$$\rightsquigarrow \quad |f_n - f^*|_\infty = 1$$

Determinate successioni di funzioni possono convergere ad un elemento limite in una topologia, ma non in un'altra.

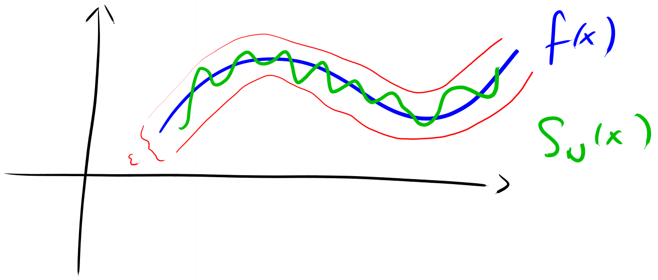
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione T-periodica, una serie trigonometrica del tipo 1) o 2)

- Converge puntualmente ad f su $\mathbb{R}$ se

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x) = f(x)$

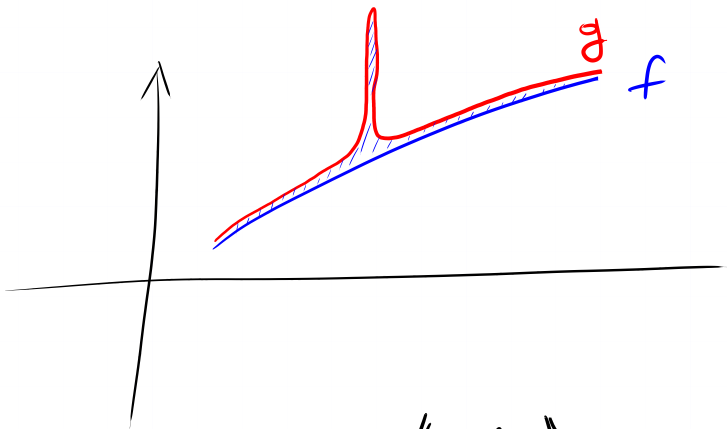
- Converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$ se

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \{ S_N(x) - f(x) \} \right) = 0$$



- Converge in energia o in L^2 ad f se è loc integrabile in $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{N\to\infty} \| S_N - f \|_2^2 = \lim_{N\to\infty} \int_0^T | S_N(x) - f(x) |^2 dx = 0$$



La convergenza in energia "valuta" la regione ombreggiata nell'esempio di cui sopra

$\Longrightarrow$ f e g sono funzioni "vicine" nella topologia L^2

Tuttavia f e g sono "lontane" nella topologia uniforme.