11/10/2021

Convergenza puntuale, uniforme ed in energia (in L^2)

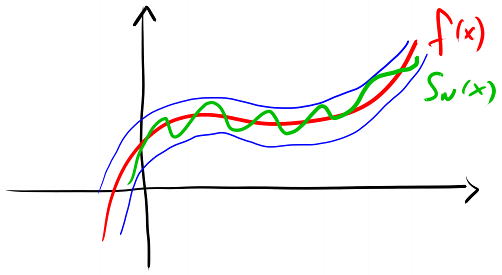
Def Una ridotta N-esima S_N converge puntualmente ad f in $\mathbb{R}$ se

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x)$$

Converge uniformemente se

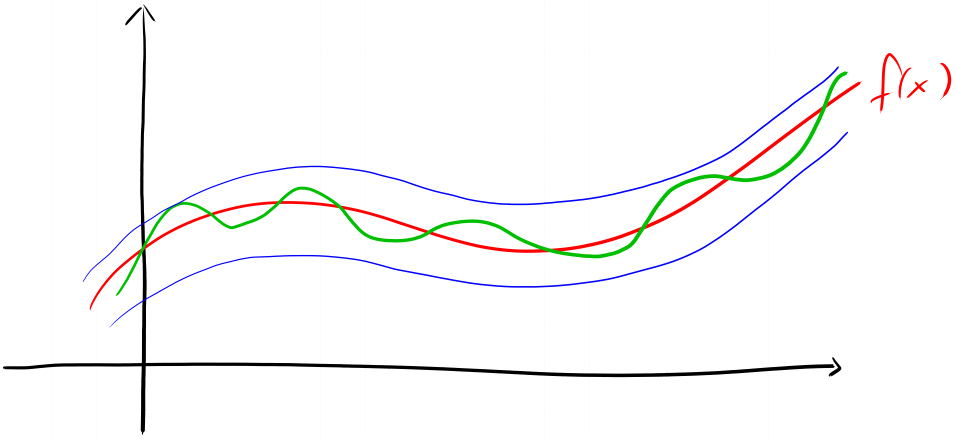
$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |S_N(x) - f(x)| = 0$$

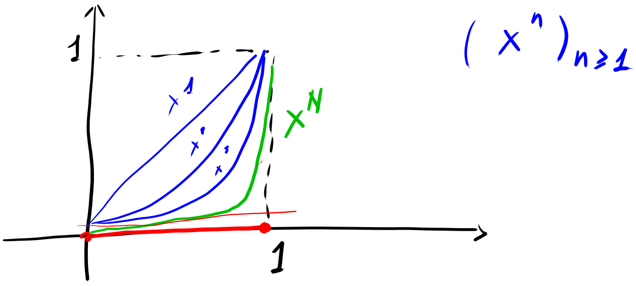
CONVERGENZA UNIFORME > CONVERGENZA PUNTUALE



Mentre S_N converge ad f in energia (o L^2) se

$$\lim_{N\to\infty} \underbrace{\int_0^T |S_N(x) - f(x)|^2 \, dx}_{\|S_N - f\|_{L^2}^2} = 0$$





Se $x\in[0,1)$: $x^n \longrightarrow 0$

$x = 1$ $x^n = 1$

Richiami di risultati di Analisi

M-test di Weierstrass

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con $f_n : E(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ $\forall n$. Se $\exists$ $(M_n)_n$ in $\mathbb{R}$ t.c.

- $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x)| < M_n \quad \forall n$
- $\sum\limits_n M_n$ converge

allora $\sum\limits_n f_n(x)$ converge uniformemente in E

OSS Perché non possiamo applicare l'M-test alla successione $(x^n)_n$ in $[0,1]$?

$$\sup_{x\in[0,1]} x^n = 1 \equiv M_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proviamo a vedere se il secondo criterio dell' M-test è verificato

$$\sum_n M_n = \infty \qquad \underline{\underline{\text{NO}}}$$

Continuità Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con $f_n : E (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ continua in E $\forall n$

Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformemente a f in E allora f è continua in E

Integrazione termine a termine

Sia $(f_n)_n$ successione di funzioni $f_n : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabile in $[a,b]$ $\forall n$

Se $\sum_n f_n$ conv unif a f in $[a,b]$ allora f è integrabile in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

cioè

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Derivazione termine a termine

Sia $(f_n)_n$ come sopra, se $\sum_n f_n$ converge puntualmente a f in $I = [a,b]$ e $\sum_n f_n'$ converge uniformemente a g in I

allora f è derivabile in I e si ha che $f' = g$

ossia

$$\frac{d}{dx}\sum_n f_n = \sum_n \frac{d}{dx} f_n$$

Esempio

Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ e stabilire la regolarità della somma.

Si ha che

- $\left|\frac{\sin(nx)}{n^4}\right| \leq 1/n^4 = M_n \quad \forall x \text{ e } \forall n$
- $\sum_n M_n$ è convergente.

$\longrightarrow$ Possiamo applicare l'M-test di Weierstrass ed otteniamo che la serie

$\sum_n \frac{\sin(nx)}{n^4}$ c.u. ad una funzione f che è continua in $\mathbb{R}$

Inoltre sempre utilizzando l'M-test deduco che la serie $\sum \frac{n\cos(nx)}{n^4}$ e $\sum -\frac{n^2\sin(nx)}{n^4}$

$\leadsto$ otteniamo dunque che f è $C^2(\mathbb{R})$.

Periodicità della somma di una serie trigonometrica

Se la serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\right) \quad \text{oppure}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

converge puntualmente in $\mathbb{R}$ ad una funzione f allora f è T-periodica.

Dall' M-test possiamo dedurre la seguente

Condizione sufficiente per la conv uniforme

- Se $\left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ è convergente allora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$$

converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

- Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ è convergente allora $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$ c.u. in $\mathbb{R}$.

Dim Basta osservare che

- $|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$
- $|c_n e^{in\omega x}| \leq |c_n|$

ed applicare l' M-test di Weierstrass. #

(*) $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$

Determinano il periodo di f

la funz f sarà determinata da $(c_n)_n$

Q Data f possiamo determinare $(c_n)_n$ t.c. (*) sia valida?

Relazioni tra i coefficienti di una serie trigonometrica e la sua somma

- Se la serie trigonometrica $\frac{a_0}{2} + \sum_n \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right)$ c.u. in $\mathbb{R}$ ad una f (f che è T-periodica e continua), allora

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega x)\, dx$$

- Nel caso complesso se $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ c.u. a f allora

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x}\, dx \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Dim

- Proviamo prima il risultato per $\sum_n c_n e^{in\omega x}$

Ricordiamo che

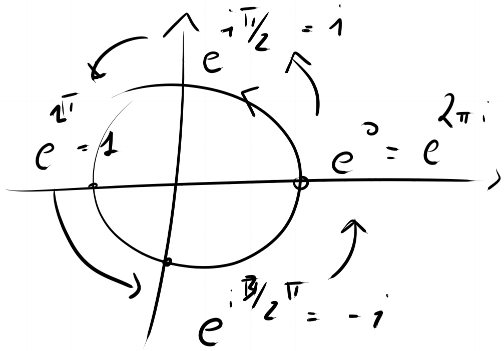
$$(*) \quad \int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega x} e^{-in\omega x}\, dx = \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(k-n)\omega x}\, dx$$

$$= \int_0^T e^{i(k-n)\omega x}\, dx =$$

se $k=n$ $= \int_0^T 1\, dx = T$

se $k \neq n$ $= \frac{1}{i(k-n)\frac{2\pi}{T}} e^{i(k-n)\omega x}\Big|_0^T$

$$= \frac{T}{2\pi i(k-n)} \Big[\underbrace{e^{i(k-n)\frac{2\pi}{T}T}}_{1} - e^0 \Big] = 0$$



Abbiamo dunque ottenuto che

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega x} e^{-in\omega x}\, dx = \begin{cases} T & \text{se } k=n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Fissiamo dunque $k \in \mathbb{Z}$ e moltiplichiamo la relazione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} = f(x)$$

per $e^{-ik\omega x} = \overline{e^{ik\omega x}}$ ed integriamo tra $-T/2$ e $T/2$

Poiché la serie converge uniformemente a f in $[-T/2, T/2]$ si può integrare termine a termine

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ik\omega x}\, dx = \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_n c_n e^{in\omega x} \right) e^{-ik\omega x}\, dx$$

$$= \sum_n c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-k)\omega x}\, dx = c_k T$$

otteniamo dunque che, dato k generico in $\mathbb{Z}$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-ik\omega x}\, dx$$

OSS 1 Dalla relazione (*) ne deduciamo che, dato lo spazio d'energia

$$L^2 = \left\{ f : \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

ed il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \overline{g(x)} \, dx \, ,$$

la famiglia $\left(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega x} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ è <u>ortonormale</u>

Continuazione della dimostrazione

- Ricordiamo le formule di Werner

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \right)$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \right)$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \right)$$

Si ottiene che

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega x) \sin(k\omega x) \, dx = 0 \qquad \text{se } k \neq n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega x) \, dx = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega x) \, dx = T/2$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega x) \cos(k\omega x) \, dx = 0 \qquad \text{se } k \neq n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega x)\ \sin(k\omega x)\ dx = 0 \quad \text{— // —}$$

Possiamo a questo punto considerare la funzione

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right)$$

ed otteniamo che

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(k\omega x)\ dx = \frac{T}{2} a_k$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\omega x)\ dx = \frac{T}{2} b_k$$