CONDIZIONE DI CAUCHY E COMPLETEZZA

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Supponiamo che $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$.
Osserviamo che

(i) la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è necessariamente limitata. Infatti se scegliamo $\varepsilon = 1$, $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $(\forall\, n \geq \bar{n})$ si ha $|x_n - \ell| < 1$

Quindi l'insieme $E_{\bar{n}} = \{x_n \mid n \geq \bar{n}\}$ è contenuto nell'intervallo limitato $[\ell-1, \ell+1]$. Solo un numero finito di termini della successione restano fuori da $[\ell-1, \ell+1]$. Tali elementi possono essere inscatolati in un opportuno intervallo $[-M, +M]$ e quindi l'insieme $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è limitato.

(ii) Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Allora per definizione $\exists\, \bar{k}$ t.c. $\forall\, n \geq \bar{k}$ risulta $|x_n - \ell| < \varepsilon/2$.
Siano ora $n, m \geq \bar{k}$. Si ha

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - \ell| + |\ell - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Abbiamo quindi la seguente proprietà: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \bar{k} \in \mathbb{N})(\forall\, n, m \geq \bar{k})(|x_n - x_m| < \varepsilon)}$$

tale proprietà si chiama "condizione di Cauchy". Abbiamo visto che se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora verifica la condizione di Cauchy. Vedremo ora che vale anche il viceversa <u>in $\mathbb{R}$</u>.

<u>TEOREMA</u>

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che soddisfa la condizione di Cauchy

$$(\forall \varepsilon>0)\,(\exists \bar{k}\in\mathbb{N})\,(\forall n,m\geq \bar{k})\,(|x_n-x_m|<\varepsilon).$$

Allora $\exists\ \ell\in\mathbb{R}$ t.c. $\lim_{n\to\infty} x_n=\ell$.

<u>Dim.</u>

$\forall\ k\in\mathbb{N}$ definiamo l'insieme

$$E_k:=\{x_n \mid n\geq k\}=\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\}$$

Osserviamo che l'insieme

$$E:=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

è limitato. Infatti scegliendo $\varepsilon=1$, si trova $\bar{k}$ t.c. $\forall\ n\geq\bar{k}$ $|x_n-x_{\bar{k}}|\leq 1$

Quindi $E=\{x_1,\dots,x_{\bar{k}-1}\}\cup\{x_{\bar{k}},\dots\}$

$$\subseteq \underbrace{\{x_1,\dots,x_{\bar{k}-1}\}}_{\text{finito e quindi limitato}}\cup[x_{\bar{k}}-1, x_{\bar{k}}+1]$$

Poiché $E_k \subseteq E$ $\forall k$, si ha che E_k è limitato $\forall k$.

Quindi $\forall k$ si ha che $s_k \in \mathbb{R}$, dove
$$s_k := \sup E_k .$$

Poiché $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_k \supseteq E_{k+1} \supseteq \dots$,

si ha che $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots \geq s_k \geq s_{k+1} \geq \dots$

Quindi $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente e limitata.

Quindi $\exists\ s \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{k\to\infty} s_k = s$.

Dimostreremo che $s = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Infatti sia $\varepsilon > 0$.

$\exists\ \bar{n}_1 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m \geq \bar{n}_1$, $|x_n - x_m| < \varepsilon/3$

$\exists\ \bar{n}_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall k \geq \bar{n}_2$, $|s_k - s| < \varepsilon/3$

Sia $\bar{n}_3 := \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$

$\exists\ \bar{n}_4 \geq \bar{n}_3$ t.c. $|x_{\bar{n}_4} - s_{\bar{n}_3}| < \varepsilon/3$

Definiamo $\bar{n} := \bar{n}_4$. Se $n \geq \bar{n}$, si ha

$$|x_n - s| \leq \underbrace{|x_n - x_{\bar{n}}|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|x_{\bar{n}} - s_{\bar{n}_3}|}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{|s_{\bar{n}_3} - s|}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon$$

$\boxtimes$

- La proprietà

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente

si dice proprietà di completezza.

$\mathbb{R}$ è completo, $\mathbb{Q}$ non è completo.

Infatti se prendo ad esempio una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di razionali t.c.

$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$, allora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, ma non ha limite <u>in $\mathbb{Q}$</u>.

<u>SOTTOSUCCESSIONI</u>

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Abbiamo detto che per definizione $x_n = \varphi(n)$ dove $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è una funzione.

Sia ora $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ <u>strettamente crescente</u>.

Consideriamo la funzione $\varphi\circ\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$(\varphi\circ\psi)(n) = \varphi(\psi(n)) = x_{\psi(n)}$

otteniamo una nuova successione.

Questa successione è di fatto ottenuta

da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selezionando infiniti indici, e buttando via gli altri.

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & \cancel{x_2} & \cancel{x_3} & x_4 & x_5 & \cancel{x_6} & \dots \\ \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & & \\ x_{\varphi(1)} & & & x_{\varphi(2)} & x_{\varphi(3)} & & \dots \end{array}$$

TEOREMA DI COMPATTEZZA

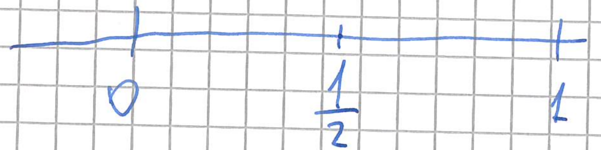
Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora $\exists$ una sottosuccessione $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ed $\exists$ $\ell \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \ell .$$

Dim.

Non è restrittivo supporre che

$0 \leq x_n \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

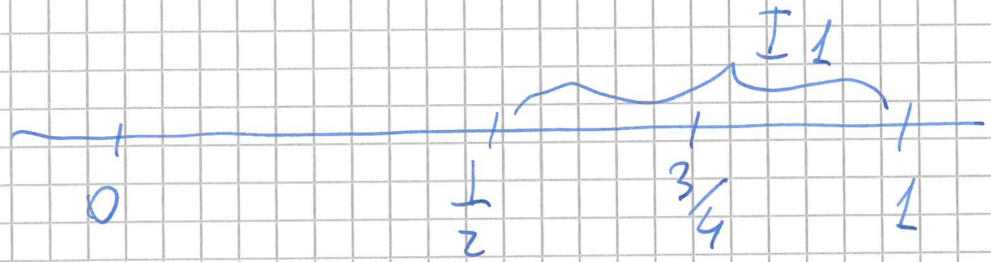


Dividiamo $[0,1]$ in due sottointervalli, $[0, 1/2]$ e $[1/2, 1]$.

Almeno uno tra essi contiene x_n per infiniti valori di n.

Chiamiamo tale intervallo I_1, e chiamiamo $\varphi(1)$ un qualunque indice t.c. $x_{\varphi(1)} \in I_1$.

Ora dividiamo I_1 in due parti uguali, ciascuna di lunghezza $1/4$



Almeno uno tra queste due parti contiene x_n per infiniti valori di n. Chiamiamo tale intervallo I_2, e chiamiamo $\varphi(2)$ un qualunque indice strettamente maggiore di $\varphi(1)$ t.c. $x_{\varphi(2)} \in I_2$.

Si ripete induttivamente tale procedura.

In questo modo si ottiene una famiglia di intervalli

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

tale che $|I_n| = \dfrac{1}{2^n}$

è una sottosuccessione $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_{\varphi(n)} \in I_n \ \forall n$.

Dimostreremo che $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Sia infatti $\varepsilon>0$. $\exists\ \bar{n}$ t.c. $2^{-\bar{n}} < \varepsilon$.

Se $n, m \geq \bar{n}$ si ha che

$x_{\varphi(n)} \in I_n \subseteq I_{\bar{n}}$ $\quad x_{\varphi(m)} \in I_m \subseteq I_{\bar{n}}$

e quindi

$$|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(m)}| < |I_{\bar{n}}| = 2^{-\bar{n}} < \varepsilon .$$

Quindi $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e quindi ammette limite $\blacksquare$

MASSIMI E MINIMI

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Un punto $x_M \in A$ si dice "punto di massimo" per f su A $\Longleftrightarrow$ $(\forall x \in A)\ (f(x) \leq f(x_M))$.

Il valore $f(x_M)$ si dice "valore massimo" di f su A.

Analoga definizione per "punto di minimo" e "valore minimo".

OSSERVAZIONE

Una funzione, anche se continua su un insieme A, potrebbe non avere massimi e/o minimi:

Esempi:

$A =]0,1[$, $f(x) = x^{-1}$ non ha max

$A =]1,+\infty[$, $f(x) = x^{-1}$ non ha min.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f ha massimo (e minimo)

Oss. $[a,b]$ è un intervallo chiuso e limitato).

Dim.

Sia $E := \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$

Sia $S := \sup E \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Se $S = +\infty$, allora $\forall\, n \in \mathbb{N}$
$\exists\, x_n \in [a,b]$ t.c. $f(x_n) \geq n$.

Posso estrarre una sottosuccessione $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \to \infty} \bar{x} \in [a,b]$.

Poiché f è continua,

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \to \infty} f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$$

ma ciò è assurdo perché

$$f(x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \,.$$

Quindi deve essere $s \in \mathbb{R}$.

Allora $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_n \in [a,b]$ t.c.

$$s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s \,. \qquad (*)$$

Posso estrarre una sottosuccessione

$(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x}$

Allora per la continuità di f si ha $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} f(\bar{x})$.

D'altra parte da $(*)$ per il teorema dei carabinieri si ha che

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} s \,.$$

Segue dall'unicità del limite che $f(\bar{x}) = s = \sup\{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$

e quindi $\bar{x}$ è punto di max per f su $[a,b]$. $\blacksquare$

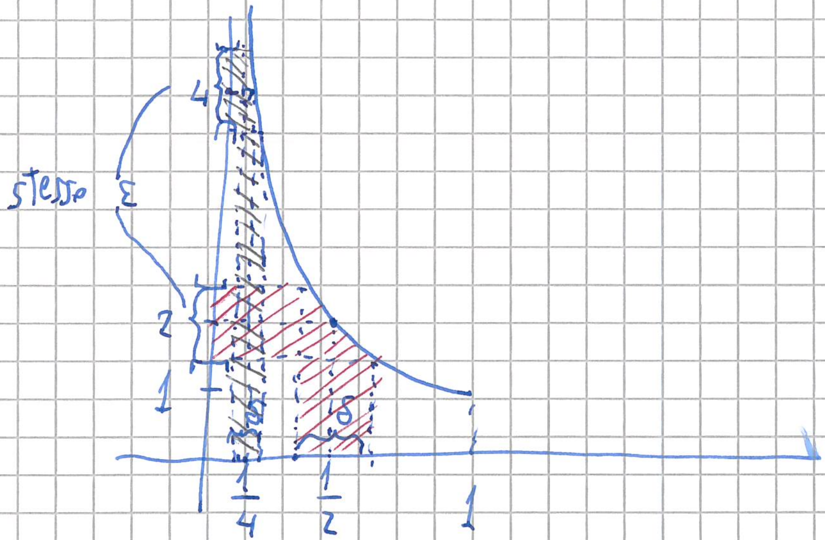
UNIFORME CONTINUITÀ

Sia f continua su un intervallo I.
Ciò significa che $(\forall x \in I)(f$ è continua in $x)$
ovvero:

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in I)(|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Il δ dipende da x e da ε.

Ad esempio per la funzione
$f(x) = \frac{1}{x}$ su $]0,1[$, per ε fissato
il δ diventa sempre più piccolo
mano a mano che x si avvicina a 0.



Se il δ dipende solo da ε e non
da x, si dice che f è
uniformemente continua su A.

Definizione

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua $\Longleftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in I)(\forall y\in I)\big(|x-y|<\delta \longrightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon\big)$$

TEOREMA

Sia $I=[a,b]$ intervallo chiuso e limitato. Sia f continua su $[a,b]$. Allora f è uniformemente continua su $[a,b]$

[Oss. ovviamente f unif. cont. $\Rightarrow f$ cont.]

Dim.

Supponiamo per assurdo che sia falso. Allora

$$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x\in I)(\exists y\in I)\big(|x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|\geq\varepsilon\big)$$

Specializzando $\delta=\frac{1}{n}$, si ha:

$$(\exists \varepsilon>0)(\forall n\in\mathbb{N})(\exists x_n\in I)(\exists y_n\in I)\big(|x_n-y_n|<\tfrac{1}{n} \wedge |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon\big)$$

Possiamo estrarre sottosuccessione in modo che

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \bar{x} \qquad y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \bar{y}$$

Allora $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\begin{array}{c} |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \\ \downarrow\, n\to\infty \\ |\bar{x} - \bar{y}| \end{array}$$

$\Longrightarrow \quad \bar{x} = \bar{y}$.

Per continuità di f,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = \lim_{n\to\infty} f(y_{\varphi(n)})$$

da cui $\lim_{n\to\infty} |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| = 0$

il che contraddice il fatto che

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon \quad \forall n.$$

Quindi f deve essere uniformemente continua in $[a,b]$.

$\blacksquare$