Lezione 10 ottobre

lunedì 10 ottobre 2022 09:12

Visto: $\mathbb{K}$ campo

Esempi di campi: $\mathbb{R}$

- $\mathbb{N}$ numeri naturali : verifichiamo campo?

  NO, manca opposto

- $\mathbb{Z}$ numeri interi: campo?

  NO, mancano inversi

  c'è l'inverso di 1 e di -1

  $(1)^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$

Ricordo che l'INVERSO x^{-1} di un elemento x verifica $x \cdot x^{-1} = 1$ dove 1 è il neutro per il prodotto.

- $\mathbb{Q}$ = numeri RAZIONALI; Campo?

  Sì

- $\mathbb{R}$: Sì campo

- $\mathbb{C}$: NUMERI COMPLESSI; campo?

  Sì

MATRICI

Def.: Siano $m, n \in \mathbb{N}$ positivi

Una MATRICE di tipo $m \times n$

a COEFFICIENTI REALI (o in $\mathbb{K}$)
oppure ENTRATE REALI (o in $\mathbb{K}$)

è una tabella rettangolare di $m \cdot n$
numeri (scalari) del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (opp. $\mathbb{K}$)

Inoltre: $\forall\ i \in \{1, \dots, m\}$, la
RIGA i-ESIMA di A è la sottomatrice
di tipo $1 \times n$ data da

$$A_{(i)} = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$$

$\forall\ j = \{1, \dots, n\}$, la COLONNA j-ESIMA

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ è la sottomatrice di tipo $m \times 1$

L'elemento a_{ij} è detto ELEM. (ENTRATA) di POSTO ij

scriveremo anche $a_{ij} = (A)_{ij}$

Def. Se $m = n$, la matrice si dice QUADRATA di ordine n.

ESEMPIO: La matrice

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

è la MATRICE NULLA

ESEMPI:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 13 & 1/4 \end{pmatrix}$$

è di tipo 2×3

$$A_{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 13 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

- $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$ è quadrata di ordine 2 : 2×2

OPERAZIONI TRA MATRICI

Def. Siano A, B matrici di tipo $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

La SOMMA $A + B$ è la matrice di tipo $m \times n$ data da

$$(A \underbrace{+}_{\text{somma tra matrici}} B)_{ij} := (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

$$= a_{ij} \underbrace{+}_{\text{somma in } \mathbb{K}} b_{ij}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 13 & 1/4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 8 & 1/2 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & 21 & 3/4 \end{pmatrix}$

Def. Sia A di tipo $m \times n$,

sia $c \in \mathbb{K}$

il **PRODOTTO** $c \cdot A$ è la matrice

$m \times n$:

$$(c \cdot A)_{ij} := c \cdot (A)_{ij} = c \cdot a_{ij}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 13 & 1/4 \end{pmatrix}$, $c = -2$

$-2 \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & -26 & -1/2 \end{pmatrix}$

PROP: L'insieme delle matrici $m \times n$

con $+$ e $\cdot$ verifica (V1), ---, (V8)

$\forall$ campo $\mathbb{K}$.

Dim.: Elemento neutro per $+$ è

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$; infatti

$$(A+0)_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij}$$

$$A + 0 = A = 0 + A$$

Opposto $-A$: $(-A)_{ij} = -a_{ij}$

$$= -(A)_{ij}$$

Altri assiomi: verifica per esercizio.

Def.: L'ins. delle matrici $m \times n$

si indica

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) \; : \; \text{SV su } \mathbb{K}$$

Se $m = n$: $M_{n,n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$

MATRICE TRASPOSTA

Def. : Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$,

la MATRICE TRASPOSTA è

$$^tA$$

è una matrice $n \times m$ ottenuta scambiando le righe e le colonne:

righe ^tA = colonne di A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

elemento di posto 2, 1

$$^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \boxed{a_{12}} & & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$({}^tA)_{ij} := A_{ji}$$

Prop. : ① $${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$$

② $${}^t({}^tA) = A$$

Dim. ① $$\left({}^t(A+B)\right)_{ij} = (A+B)_{ji} = \underline{(A)_{ji} + (B)_{ji}}$$

$$\left({}^tA + {}^tB\right)_{ij} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij}$$

$$= \underline{(A)_{ji} + (B)_{ji}}$$

Def. : Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

① la DIAGONALE PRINCIPALE di A è data dagli elementi di tipo a_{ii}

② A è MATRICE DIAGONALE

se $a_{ij} = 0 \quad \forall \; i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

ma anche $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ A è SIMMETRICA

se è simm. rispetto alla diagonale principale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ * & a_{22} & & & \\ * & & \ddots & & * \\ \vdots & & & & \\ * & & * & a_{nn} & \end{pmatrix}$$

cioè $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\ i,j$

ovvero: ${}^tA = A$

④ La matrice

$$\mathbb{I}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si chiama MATRICE UNITÀ

Introduco: δ_{ij} = simbolo di KRONECKER

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$(\mathbb{I}_n)_{ij} = \delta_{ij}$$