Lezione 11 ottobre 22

martedì 11 ottobre 2022 14:11

FOGLIO 1

ⓐ V SV su $\mathbb{K}$

Dimostrare che $\forall \vec{v} \in V$, si ha

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{K}}}{0} \cdot \vec{v} = \underset{\in V}{\vec{0}}$$

PROPOSTE DI SVOLGIMENTO:

$$\boxed{0 \cdot (-\vec{v}) + 0 \cdot \vec{v} = 0 \cdot (-\vec{v})} \longleftarrow$$

NON SAPPIAMO ANCORA QUANTO VALE $0 \cdot (-\vec{v})$

$$0 (\underbrace{-\vec{v} + \vec{v}}) = 0 \cdot (-\vec{v})$$

* * *

$$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

modulo $= 0$

$\vec{0}$

in $\vec{0}$ $P \equiv A$

QUESTO ARGOMENTO VALE SOLO PER I VETTORI APPLICATI E I VETTORI LIBERI

* * *

$$0\vec{v} = \vec{0}$$

$$0\vec{v} = (0+0)\vec{v} = 0\vec{v} + 0\vec{v} \qquad \vec{0}$$

$$\cancel{-0\vec{v}} + \cancel{0\vec{v}} = 0\vec{v} + \overbrace{0\vec{v} - 0\vec{v}}$$

$$\vec{0} = 0\vec{v} + \vec{0}$$

$$\vec{0} = 0\cdot\vec{v}$$

Rivediamo: osservo che $0 = 0+0$ perchè 0 è neutro per $+$ in $\mathbb{K}$

Quindi posso scrivere

$$0\cdot\vec{v} = (0+0)\cdot\vec{v} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{DISTR} \\ \text{V6}}}{=} 0\cdot\vec{v} + 0\cdot\vec{v}$$

$$\boxed{0\cdot\vec{v} = 0\cdot\vec{v} + 0\cdot\vec{v}}$$

per V4, esiste opposto di $0\cdot\vec{v}$:

$$-0\cdot\vec{v}$$

$$\underbrace{-0\cdot\vec{v} + 0\cdot\vec{v}}_{=\vec{0}} = \underbrace{-0\cdot\vec{v} + 0\cdot\vec{v}}_{=\vec{0}} + \underbrace{0\cdot\vec{v}}$$

per def. di opposto

$$\vec{0} = \boxed{\vec{0} + \boxed{0\cdot\vec{v}}}$$

$$\vec{0} = 0\cdot\vec{v}$$

siccome $\vec{0}$ è neutro per $+$ in V per V3

ⓑ $\forall\, t \in \mathbb{K}$, si ha

$$t \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

PROPOSTE DI SVOLGIMENTO:

$$T \cdot_V \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\cdot 0 \\ T \cdot 0 \\ \vdots \\ T\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

ok: se $V = \mathbb{K}^n$

* * *

ALTRA PROPOSTA:

$$t \cdot \vec{0} \overset{\boxed{V4}}{=} t \cdot (\vec{v} + (-\vec{v}))$$

$$\underset{\boxed{V6}}{=} t \cdot \vec{v} + t \cdot (-\vec{v})$$

$$\overset{?}{=} -t \cdot \vec{v}$$ NON LO SAPPIAMO

ALTRA PROPOSTA:

$$t \cdot \vec{0} = t \cdot (0 \cdot \vec{v})$$ ⓐ

$$\underset{\boxed{V7}}{=} \underbrace{\overset{\in \mathbb{K}}{(t \cdot 0)}}_{=0} \cdot \vec{v}$$

$= 0$: DIMOSTRATO A LEZIONE: $a \cdot 0 = 0 \ \forall a \in \mathbb{K}$

per il punto ⓐ del foglio di esercizi

$$= 0 \cdot \vec{v} \overset{\downarrow}{=} \vec{0}$$

☺

ALTRO MODO: $t\cdot\vec{o} = t\cdot(\vec{o}+\vec{o})$

$\overset{\text{V6}}{=} t\cdot\vec{o} + t\cdot\vec{o}$

sommo $-t\cdot\vec{o}$ a entrambi i membri

$$\underbrace{-t\cdot\vec{o}+t\cdot\vec{o}}_{=\vec{o}} = \underbrace{-t\cdot\vec{o}+t\cdot\vec{o}}_{=\vec{o}}+t\cdot\vec{o}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{o} = t\cdot\vec{o}$$

ⓒ In V esiste 1! vettore nullo:

PROPOSTA:

$$v+0 = v+0' = v \qquad 0 \neq 0'$$

$$\underbrace{v-v}_{=0}+0 = \underbrace{v-v}_{=0}+0' \qquad ?$$

SVOLGIMENTO:

$$0+0 = 0+0'$$

$$0' = \overset{\text{neutro}}{0}+\underbrace{0'}_{\text{neutro}} = 0 \Rightarrow 1!\ \text{neutro}$$

ⓓ Ogni vettore $v\in V$ ha 1! opposto

Supp. per assurdo: $-v$ e $-v'$ due opposti di v

$$-v = -v+0 = -v+(v+(-v'))$$

$$= \underbrace{(-v+v)}+(-v') = 0+(-v')$$

$$= \overset{=0}{\boxed{-v'}}$$

ⓔ $\forall\, v \in V$, si ha

$$(-1)\cdot v = -v$$

dove -1 è l'opposto di 1 in $\mathbb{K}$

$$v + ((-1)\cdot v) \underset{\boxed{V8}}{=} 1\cdot v + ((-1)\cdot v)$$

$$\underset{\boxed{V6}}{=} \underbrace{(1+(-1))}_{=0}\cdot v = 0\cdot v \underset{ⓐ}{=} 0$$

$\Longrightarrow$ per l'unicità dell'opposto, $(-1)\cdot v$ è l'opposto di v

(2) Tabella di molt. per $\mathbb{Z}_{12}$

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
2	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10	NON è invertibile
3	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9	NON è invertibile
4	4	8	0	4	8	0	$\boxed{4}$	8	0	4	8	Non è invertibile
5	5	10	3	8	$\boxed{1}$	6	11	4	9	2	7	è invertibile: $5\cdot 5=1$, $5^{-1}=5$
6	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	
7	7	2	9	4	11	6	$\boxed{1}$	8	3	10	5	è invertibile $7\cdot 7=1$, $7^{-1}=7$
8	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	
9	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3	

10

11 | 11 10 ⑨ 8 7 6 5 4 3 2 ① è invertibile: $11 \cdot 11 = 1$, $11^{-1} = 11$

$$5 \cdot (a) + 5 \cdot (12 - a) = 0 \text{ in } \mathbb{Z}_{12}$$

$$5 \cdot a + 5 \cdot 12 - 5 \cdot a = 5 \cdot 12$$

$$1 + 11 = 0$$

$$a \cdot (1 + 11) = 0$$

$$a \cdot 1 + a \cdot 11 = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot 11 = - a \cdot 1$$

$$4 + 8 = 0$$

$$a \cdot (4 + 8) = 0$$

$$a \cdot 4 + a \cdot 8 = 0$$

$$a \cdot 8 = - a \cdot 4$$

③ Quanti elementi ha

$$(\mathbb{Z}_3)^n = \underbrace{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \cdots \times \mathbb{Z}_3}_{n \text{ volte}}$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$$

$$\#(\mathbb{Z}_3)^n = 3^n$$

$\mathbb{Z}_3 = 3$ elementi

$$(\mathbb{Z}_3)^m = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}_{m \text{ volte}}$$

$$(\mathbb{Z}_3)^2 = \begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & & & \\ 1 & & & \\ 2 & & & \end{array}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Per induzione su n:

$n = 1$: $(\mathbb{Z}_3)^1 = \mathbb{Z}_3$, $\# = 3^1 = 3$

Supp. per $n-1$: $\#(\mathbb{Z}_3)^{n-1} = 3^{n-1}$

Dimostro che vale per n:

i vettori di $(\mathbb{Z}_3)^n$ sono del tipo

$$\begin{pmatrix} a \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{n-1}$$

Per ipotesi induttiva: $\forall\ e \in \mathbb{Z}_5$ fissato, ho 3^{n-1} vettori

ho 3 modi di scegliere e:

complessiv. $3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$ vettori