Lezione 17 ottobre 2022

lunedì 17 ottobre 2022 09:02

SISTEMI LINEARI

Def.: Un SISTEMA LINEARE di m equazioni in n incognite ($m, n \in \mathbb{N}$, $m>0$, $n>0$) è un insieme finito di equaz. del tipo

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove: $x_1, x_2, \dots, x_n$ INCOGNITE

$a_{ij} \in \mathbb{K}$ COEFFICIENTI

$b_1, \dots, b_m \in \mathbb{K}$ TERMINI NOTI

Def.: Una SOLUZIONE di $(*)$ è una n-pla $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ con $s_i \in \mathbb{K}$ t.c. se ogni s_i è sostituito a x_i, le eq. di $(*)$ sono soddisfatte.

Def. Se $(*)$ ha ALMENO 1 sol., si dice COMPATIBILE

Se $(*)$ non ha soluzioni, si dice INCOMPATIBILE o IMPOSSIBILE

Def.: Se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ $(*)$ si dice SIST. LIN. OMOGENEO

Notazione: SLO

SL: sist. lin.

Esempi:

① $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

è INCOMP.

② $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \quad x_1 + 2(x_1 - 3) = 1$$

$: \; x_2 = x_1 - 3$

$3x_1 - 6 = 1, \quad 3x_1 = 7, \quad x_1 = 7/3$

$x_2 = \frac{7}{3} - 3 = -\frac{2}{3}$

⇒ il SL è compatibile

⇒ ha 1! soluzione

$(s_1, s_2) = (7/3, -2/3)$

③ $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 & : \boxed{x_1 = 1 - 2x_2} \\ 2x_1 + 4x_2 = 2 & : 2(1 - 2x_2) + 4x_2 = 2 \end{cases}$$

$$2 - \cancel{4x_2} + \cancel{4x_2} = 2$$

IDENTITÀ

⇒ è compatibile, e sol.

ad esempio $(1, 0)$, $(1/3, 2/3)$

su $\mathbb{R} = \mathbb{K}$, la GENERICA SOLUZ. è

cons. un PARAMETRO $c \in \mathbb{R}$

$x_2 = c, \quad x_1 = 1 - 2c$

$$\boxed{(s_1, s_2) = (1 - 2c, c)}$$

ovvero: l'insieme delle soluzioni è

$$\{(1 - 2c, c) : c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

sono infinite

Def. 2 SL si dicono **EQUIVALENTI** quando hanno le stesse soluzioni

Es: $\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+4x_2=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1+8x_2=4 \\ 8x_1+16x_2=8 \end{cases}$

$$\boxed{\left\{x_1+2x_2=1\right.}$$

oss. Cons. SLO

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

ammette la SOLUZIONE NULLA

$(s_1,\dots,s_n)=(0,\dots,0)$

quindi è SEMPRE COMPATIBILE

* * *

Possiamo esprimere $\circledast$ in forma matriciale:

Def: Sia

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow \text{coeff. } 1^a \text{ eq.} \\ \\ \leftarrow \text{coeff. } m^a \text{ eq.} \end{array}$$

di tipo $m \times n$

si chiama MATRICE DEI COEFF. di $\circledast$

Sia: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ COLONNA DELLE INCOGNITE

di tipo $n \times 1$

Allora: $\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{X} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$

$\textcircled{m} \times \textcircled{1}$

$=$

$=$

Sia $\underset{m \times 1}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ COLONNA DEI TERMINI NOTI

$\textcircled{*} \iff \boxed{A \cdot X = b}$

Pb: Capire quando SL è COMPATIBILE o NO.

Un primo criterio per SL quadrati: $m = n$

TEOREMA DI CRAMER:

Sia $A \cdot X = b$ un SL con

A matrice quadrata : $A \in M_n(K)$

Se A è matrice INVERTIBILE

$(A \cdot M = M \cdot A = \mathbb{I}_n)$, allora

$M = A^{-1}$

il SL è compatibile e ha 1! soluz., data da

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \underbrace{\underbrace{A^{-1}}_{n \times n} \cdot \underset{n \times 1}{b}}_{n \times 1}$$

Dim. : Devo dim. 2 cose:

- $s = A^{-1} \cdot b$ è soluzione
- non ci sono altre soluzioni

Primo passo:

s sostituita alle incognite:

$$A \cdot X \quad : \quad A \cdot s$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot s} = A \cdot (A^{-1} \cdot b)$$

| Assoc. di $\cdot$

$$= \underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{= \mathbb{I}_n} \cdot b$$

$$= \mathbb{I}_n \cdot b = \boxed{b}$$

$\Rightarrow \quad s = A^{-1} \cdot b$ è soluz.

Secondo punto:

sia s' un'altra soluzione

$$s' = \begin{pmatrix} s_1' \\ \vdots \\ s_n' \end{pmatrix}$$

cioè: $\underbrace{A \cdot s'}_{n \times 1} = \underbrace{b}_{} \; n \times 1$

moltiplico per A^{-1} entrambi i membri

$$A^{-1}\cdot(A\cdot s') = A^{-1}\cdot b$$

Assoc. di $\cdot$

$$\underbrace{(A^{-1}\cdot A)}_{=\mathbb{I}_n}\cdot s' = A^{-1}\cdot b$$

$$\underbrace{\mathbb{I}_n\cdot s'}_{= s'}$$

$$\Rightarrow \quad s' = A^{-1}\cdot b = s$$

* * *

CONSEG.: Se $A\cdot X = 0$

$A\in M_n(\mathbb{K})$, e A invertibile

per Cramer, lo so che ha 1! soluz.

La soluzione $s = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ è soluz.

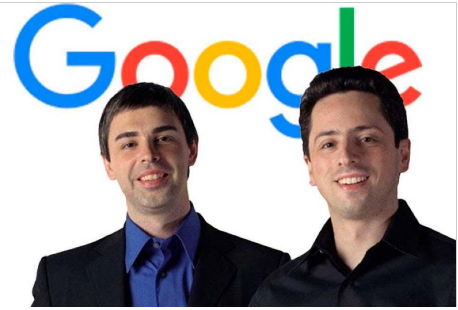
$\Rightarrow$ non ci sono altre soluz.

(ad ogni modo: per Cramer $s = A^{-1}\cdot b$ è l'unica soluzione

$$\overset{!}{=} A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} 0 \text{ matrice nulla}$$)

PAGE RANK



2000 : Fondato GOOGLE da LARRY PAGE (informatico) e SERGEJ BRIN (matematico)

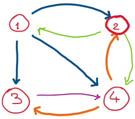
PROBLEMA: CLASSIFICARE LE PAGINE DELLA RETE DA ESIBIRE TRAMITE MOTORE DI RICERCA

PARTENZA: Importanza di una pagina dipende dal # (numero) di pagine importanti che puntano ad esse.

- Inoltre: l'import. di una pagina si trasferisce in parti uguali alle pagine a cui punta

- Import. di pagina = somma delle frazioni di importanza che le derivano dalle pagine che ad essa puntano

ES. 4 pagine:



Definiamo $H \in M_4(\mathbb{R})$ tale che

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists \text{ link dalla pagina } i \text{ alla } j \\ 0 & \text{se } \nexists \text{ link dalla } i \text{ alla } j \end{cases}$$

$h_{11}=0,\ h_{12}=1,\ h_{13}=1,\ h_{14}=1$

$h_{21}=1,\ h_{22}=0,\ h_{23}=0,\ h_{24}=1$

$h_{31}=0,\ h_{32}=0,\ h_{33}=0,\ h_{34}=1$

$h_{41}=0,\ h_{42}=1,\ h_{43}=1,\ h_{44}=0$

MATRICE DI ADIACENZA

LINK CHE PUNTANO A ②

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$r_4 = 2$
LINK CHE PARTONO DA ④

La somma delle entrate di H in ogni riga i
= # link che partono dalla pagina i $= r_i$

Indichiamo con x_j l'importanza della pagina j.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2}{2} \\ x_2 = \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_4}{2} \\ x_3 = \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_4}{2} \\ x_4 = \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{2} + x_3 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} x_2 = 0 \\ -\dfrac{x_1}{3} + x_2 - \dfrac{x_4}{2} = 0 \\ -\dfrac{x_1}{3} + x_3 - \dfrac{x_4}{2} = 0 \\ -\dfrac{x_1}{3} - \dfrac{x_2}{2} - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

è SLO

La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = 0$$

Posso scrivere l'equazione j nella forma generale:

$$\circledast \quad x_j = h_{1j} \frac{x_1}{r_1} + h_{2j} \frac{x_2}{r_2} + h_{3j} \frac{x_3}{r_3} + h_{4j} \frac{x_4}{r_4}$$

$\forall\ j = 1,2,3,4$

Spesso, il SLO associato a H ammette solo la soluzione nulla $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (0,0,0,0)$, non è significativa per noi.

Page & Brin hanno introdotto un fattore correttivo:

si fissa una costante d: $0 < d < 1$ e modifichiamo l'equazione $\circledast$:

$$\boxed{x_j = d\left(h_{1j} \frac{x_1}{r_1} + h_{2j} \frac{x_2}{r_2} + h_{3j} \frac{x_3}{r_3} + h_{4j} \frac{x_4}{r_4}\right) + \frac{1}{4}(1-d)}$$

SOLITAMENTE si pone $d = 0.85$

Esercizio: Riscrivere il SL. (non sarà omogeneo) e la matrice dei coefficienti