Lezione 13 ottobre 22

giovedì 13 ottobre 2022 10:17

VISTO : Matrici, $M_{m,n}(\mathbb{K})$: $m \times n$

$+$, e molt. $\cdot$ per un elem. di $\mathbb{K}$

$A+B$, $c \cdot A$

PRODOTTO RIGA PER COLONNA:

Def.: Sia

$A = (a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$

matrice riga

e sia $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

Il PRODOTTO $A \cdot B$ è lo scalare

$$A \cdot B = \underbrace{a_{11} b_{11}}_{\text{prodotto in } \mathbb{K}} \overset{\text{somme in } \mathbb{K}}{+} a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

In generale,

sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

e sia $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

il PRODOTTO RIGA × COLONNA è la matrice $m \times p$

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{(i)} \cdot B^{(j)}$$

$$A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{K})$$

oss.: Se # colonne di A $\neq$ # righe di B

A e B NON si possono moltiplicare

CASO PARTICOLARE:

Matrici quadrate : $m = n$:

$A \in M_n(\mathbb{K})$, $B \in M_n(\mathbb{K})$

$A \circ B \in M_n(\mathbb{K})$

$$\underbrace{n \times n \qquad n \times n}_{n \times n}$$

Posso $\underbrace{\underset{n \times n}{B} \cdot \underset{n \times n}{A}}_{n \times n} \in M_n(\mathbb{K})$

DOMANDA: $A \cdot B = B \cdot A$?

IN GENERALE, NO

Esempio:

$$\underset{2 \times 2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{2 \times 2}{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) & \cdot \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$(A \cdot B)_{11} = A_{(1)} \cdot B^{(1)}$$

$\neq$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}$$

Esempio:

$$\underset{2 \times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underset{3 \times 2}{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\underset{2 \times 3}{A} \cdot \underset{3 \times 2}{B}}_{2 \times 2} \qquad \underbrace{\underset{3 \times 2}{B} \cdot \underset{2 \times 3}{A}}_{3 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 26 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 24 & 0 & 16 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

DOMANDA: ∃ una matrice che sia NEUTRO per · RC ?

$\underset{\text{riga} \times \text{colonna}}{\downarrow\swarrow}$

Provo: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ NON è neutro

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

PROP.

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha

$$\underbrace{\underset{m\times m}{\mathbb{I}_m} \cdot \underset{m\times n}{A}}_{m\times n} = \underbrace{\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{\mathbb{I}_n}}_{m\times n} = A$$

② $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$C, D \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{(A+B)}_{m\times n} \cdot \underset{n\times p}{C}}_{m\times p} = \underbrace{\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{C}}_{m\times p} + \underbrace{B \cdot C}_{m\times p}$$

$$\underbrace{\underset{m\times \textcircled{n}}{A} \cdot \underbrace{(\underset{n\times p}{C} + \underset{n\times p}{D})}_{\textcircled{n}\times p}}_{m\times p} = \underbrace{A \cdot C + A \cdot D}_{m\times p}$$

③ $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \forall C \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$\forall c \in \mathbb{K}$

$$\underbrace{\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{(\underbrace{c \cdot C})}}_{m\times p} = (c \cdot A) \cdot C = c \cdot (A \cdot C)$$

④

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{C})}_{m\times p} \cdot \underset{p\times q}{G}} = \underbrace{\underset{m\times n}{A} \cdot \underbrace{(\underset{n\times p}{C} \cdot \underset{p\times q}{G})}_{n\times q}}$$

$m \times q$ $\qquad\qquad$ $m \times q$

Dim:

①

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \\ & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot \mathbb{I}_n)_{ij} = A_{(i)} \cdot \mathbb{I}_n^{(j)} = a_{ij}$$

$$= (a_{i1} \; a_{i2} \cdots a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix} = \underbrace{a_{i1} \cdot \delta_{1j}}_{=0} + \underbrace{a_{i2} \cdot \delta_{2j}}_{=0} + \cdots + \underbrace{a_{ij} \cdot \delta_{jj}}_{=a_{ij}} + \cdots + \underbrace{a_{in} \cdot \delta_{nj}}_{=0}$$

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ 1 & \text{se } k = j \end{cases}$$

cioè: $\delta_{jj} = 1$, gli altri sono $= 0$

$$j = 4: \quad \begin{pmatrix} \delta_{14} \\ \delta_{24} \\ \delta_{34} \\ \delta_{44} \\ \delta_{54} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot$$

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad a_{i4} \; a_{i5}) = a_{i4}$$

Domanda: Come si comporta · RC rispetto alla TRASPOSIZIONE:

LEMMA:

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\underbrace{{}^t\underbrace{(A \cdot B)}_{m \times p}}_{p \times m} \quad \cancel{\underbrace{{}^tA}_{n \times m} \cdot \underbrace{{}^tB}_{p \times n}} \quad \neq$$

$$\| \qquad \underbrace{{}^tB \cdot {}^tA}_{p \times m}$$

$${}^{t}B_{p\times n} \quad , \quad {}^{t}A_{n\times m}$$

MATRICE INVERSA:

Def. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ quadrata.

A si dice **INVERTIBILE** se

$\exists\ M \in M_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$\boxed{A\cdot M = M\cdot A = \mathbb{I}_n \quad ⊛}$$

Prop. Se A è invertibile, allora M che verifica ⊛ è UNICA

e viene chiamata **INVERSA DI A**

$$M =: A^{-1}$$

OSS. NON VALE LA PROPRIETÀ che

$A \neq \mathbb{O}$ matrice nulla $\Rightarrow A$ invertibile

Controesempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists ?\ M \in M_2(\mathbb{R})$ t.c.

$$A\cdot M = M\cdot A = \mathbb{I}_2 \quad ?$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A\cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\overset{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \iff \begin{cases} a+c = 1 \\ b+d = 0 \\ a+c = 0 \\ b+d = 1 \end{cases}$$

SISTEMA LINEARE di 4 equazioni in 4 incognite

è INCOMPATIBILE

IMPOSSIBILE

cioè NON ha soluzione

$\Rightarrow$ NON esiste alcuna matrice M di tipo 2×2 tale che $A\cdot M = \mathbb{I}_2$, cioè A NON È INVERTIBILE