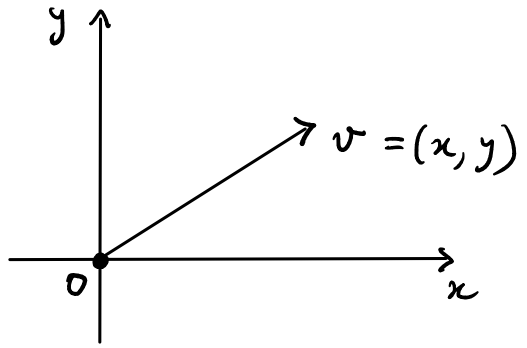
# Lezione 7

## Vettori nel piano

Per noi il piano sarà $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (piano cartesiano).

**Vettore** coppia ordinata

$$v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$$




Lo possiamo pensare come un segmento orientato con origine in $O = (0,0)$ e estremo nel punto $(x,y)$. Gli elementi stessi di $\mathbb{R}^2$ (cioè le coppie) possono essere riguardate sia come punti che come vettori.

**Somma** Dati $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ possiamo definire la loro somma

$$v_1 + v_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Nell'ambito del calcolo vettoriale i numeri reali verranno chiamati anche scalari

**Prodotto (per uno) scalare** Dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v = (x,y)$ possiamo definire il prodotto

$$\alpha v = \alpha (x,y) := (\alpha x, \alpha y)$$

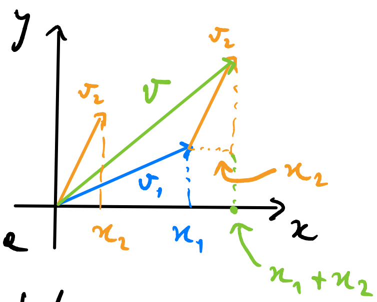
Esaminiamo il significato geometrico

1) Somma

$v = v_1 + v_2$

si ottiene con la

regola del parallelogramma




Infatti il segmento orientato $v_2$

a destra ha estremo di coordinate $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

(l'ascissa si vede in figura, l'ordinata si rileva in modo analogo). Pertanto la somma di vettori definita sopra è esattamente l'usuale operazione considerata a scuola. Usando il nostro approccio diventa molto più semplice fare calcoli coi vettori.

2) prodotto scalare $\alpha v$ è ottenuto riscalando $v$ di $|\alpha|$, con lo stesso verso se $\alpha > 0$ e verso opposto se $\alpha < 0$

**Vettore nullo** $0 = (0,0)$ è il vettore di coordinate nulle.

**Opposto di un vettore** Se $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ poniamo

$$-v := (-x, -y)$$

Le proprietà algebriche dei numeri reali si riflettono sui vettori. Per tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ e per tutti gli scalari si ha:

1) $u+(v+w)=(u+v)+w$   + associativa

2) $u+v=v+u$   + commutativa

3) $0+v=v+0=v$   0 è elemento neutro per +

4) $v-v=v+(-v)=0$   $-v$ opposto di $v$

5) $\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w$

6) $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$

7) $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$

8) $1\cdot v=v$

} legame tra $\cdot$ e +

$\forall\, u, v, w$ vettori, $\forall\, \alpha, \beta$ scalari

---

Verifichiamo per esempio la (6) (le altre sono ± simili)

Posto $v=(x,y)$ si ha:

$$(\alpha+\beta)v=((\alpha+\beta)x,(\alpha+\beta)y)=(\alpha x+\beta x,\alpha y+\beta y)=$$
$$=(\alpha x,\alpha y)+(\beta x,\beta y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y)=$$
$$=\alpha v+\beta v.$$

$\boxed{E}$ Verificare le altre per esercizio.

<u>Vettori nello spazio</u> Lo <u>spazio ordinario</u> è definito come

$$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

I suoi elementi li chiameremo, come nel caso del piano, <u>vettori</u> (o talvolta <u>punti</u>). Le operazioni nel piano si generalizzano facilmente:

<u>Somma</u> $\forall\, v_1=(x_1,y_1,z_1),\ v_2=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$

$$v_1+v_2:=(x_1+x_2,\,y_1+y_2,\,z_1+z_2)$$

**Prodotto (per uno) scalare** $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha \cdot v := (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

L'interpretazione geometrica è analoga a quella nel piano.

Anche queste operazioni soddisfano le proprietà algebriche (1), ..., (8) viste sopra con $0 = (0,0,0)$ e $-v = (-x,-y,-z)$.

Ancora più in generale possiamo considerare l'<u>n-spazio vettoriale numerico reale</u>

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{ (x_1, \dots x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$$

con le operazioni di **somma**

$\forall v = (x_1, \dots, x_n)$, $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definiamo

$$v + w := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

e **moltiplicazione scalare**

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ definiamo

$$\alpha v := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Le proprietà algebriche (1), ..., (8) valgono ancora ponendo $0 := (0, 0, \dots, 0)$ come vettore nullo di $\mathbb{R}^n$ (indicato anche $0_{\mathbb{R}^n}$)

$\forall v = (x_1, \dots, x_n)$, $-v := (-x_1, \dots, -x_n)$ come opposto

**Es** $v=(3,-2,1,0)$ , $w=(\frac{1}{2},1,0,0)\in\mathbb{R}^4$

$$v+w=\left(\frac{7}{2},-1,1,0\right)$$

$$3v=(9,-6,3,0)$$

Si osservi che $0\cdot v=0_{\mathbb{R}^n}$ $\forall\, v\in\mathbb{R}^n$.

**OSS** Se $n=1$ si ha $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$ e la chiamiamo <u>retta reale</u>.

Poniamo anche $\mathbb{R}^0:=\{0\}$ e lo chiamiamo <u>spazio vettoriale nullo</u>. Si osservi che <u>non è vuoto</u>!

<u>Caso complesso</u> Il discorso si ripete senza variazioni se al posto di $\mathbb{R}$ usiamo $\mathbb{C}$ definendo l'<u>n-spazio vettoriale numerico complesso</u>

$$\mathbb{C}^n=\underbrace{\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{n \text{ volte}}=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_1,\dots,x_n\in\mathbb{C}\}$$

Gli elementi di $\mathbb{C}^n$ saranno chiamati <u>vettori</u> (o <u>punti</u>) <u>complessi</u> o semplicemente <u>vettori</u>. Le operazioni sono definite come nel caso reale:

<u>Somma</u> $\forall\, v=(x_1,\dots,x_n)$, $w=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{C}^n$

$$v+w:=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\in\mathbb{C}^n$$

moltiplicazione scalare $\forall\,\alpha\in\mathbb{C}$, $\forall\, v=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$

$$\alpha v:=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\in\mathbb{C}^n$$

Le proprietà (1), ..., (8) valgono ancora per tutti i vettori di $\mathbb{C}^n$ e per tutti gli scalari complessi.

$\mathbb{C}^0 = \{0\}$ spazio nullo

$\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$ retta complessa

$\mathbb{C}^2$ piano complesso

Più in generale se $\mathbb{K}$ è un campo

ad es. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ ($p$ primo)

si definisce l'n-spazio vettoriale numerico su $\mathbb{K}$ come

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}$$

con le operazioni di somma e moltiplicazione scalare come sopra. La validità delle (1), ..., (8) per tutti i vettori di $\mathbb{K}^n$ e tutti gli scalari di $\mathbb{K}$ segue dalle proprietà algebriche dei campi come sopra.

**Es** 1) $\mathbb{Z}_2^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$$(0,1) + (1,1) = (1,0)$$

2) $\mathbb{Z}_p^n$ ha $p^n$ elementi $(\#(X \times Y) = \# X \cdot \# Y)$

3) $\mathbb{Q}^2$ è il piano razionale

$\mathbb{Q}^3$ è lo spazio razionale

Si ha $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$

(una n-upla razionale è anche reale e una n-upla reale è anche complessa).

Il numero $n$ in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ o più in generale $\mathbb{K}^n$ si chiama dimensione (capiremo meglio più avanti).

# Spazi vettoriali

Prendendo spunto dagli esempi precedenti $\mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_p^n$ formuliamo la definizione di spazio vettoriale prendendo le proprietà (1), ..., (8) come assiomi.

**Def** Consideriamo un campo $\mathbb{K}$. Un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale (o spazio vettoriale su $\mathbb{K}$) è un insieme non vuoto $V$ munito di due funzioni (dette operazioni)

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad \text{(somma)}$$
$$(v, w) \mapsto v + w \qquad \text{(è una notazione)}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \qquad \text{(moltiplicazione scalare)}$$
$$(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v \qquad \text{(altra notazione)}.$$

Richiediamo che esista un elemento $0_V \in V$ e che per ogni elemento $v \in V$ esista un elemento denotato $-v \in V$ in modo che siano soddisfatti gli assiomi (1), ..., (8):

1) $u + (v + w) = (u + v) + w$ — $+$ associativa
2) $u + v = v + u$ — $+$ commutativa
3) $0_V + v = v + 0_V = v$ — $0$ è elemento neutro per $+$
4) $v - v = v + (-v) = 0_V$ — $-v$ opposto di $v$
5) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
6) $(\alpha + \beta) v = \alpha v + \beta v$
7) $(\alpha \beta) v = \alpha (\beta v)$
8) $1 \cdot v = v$

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ \forall\, u, v, w \in V.$