



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

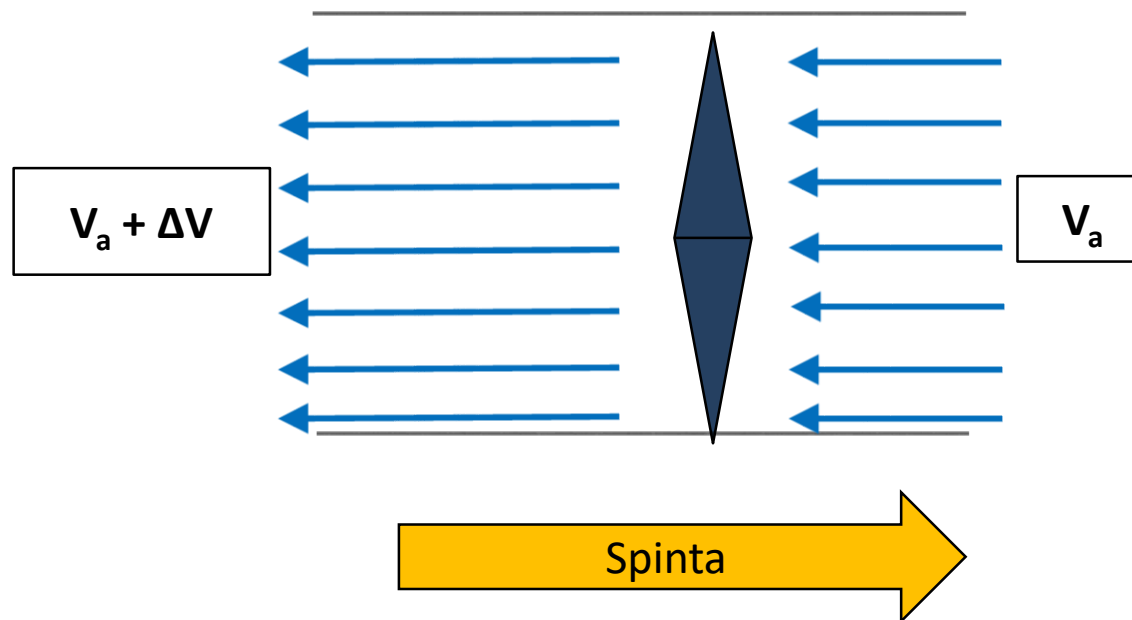
Teorie Classiche dell'Elica

Prof. Paolo Frandoli

A.A. 2022-2023

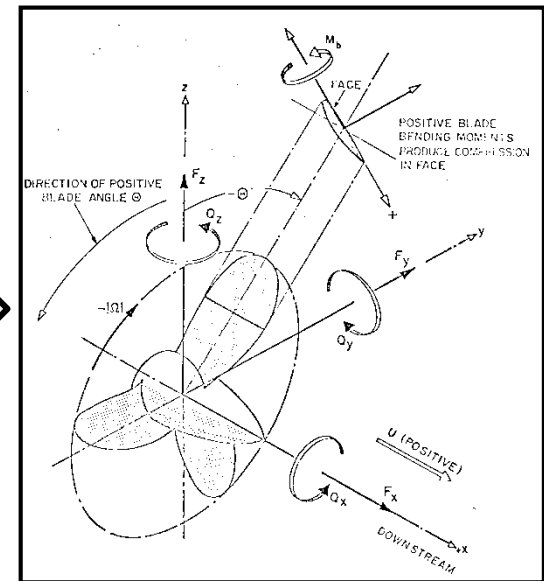
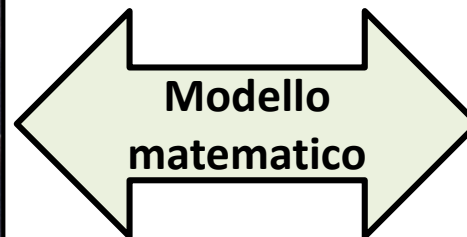
Come funziona l'elica

L'elica accelera il fluido di massa "m", alterandone lo stato di moto, con una forza ($F = m \cdot a$) a cui si oppone una reazione uguale e contraria del fluido sull'elica stessa, cioè la spinta. (2^a legge di Newton)



Teoria dell'elica

- Modello matematico che descriva l'interazione tra l'elica ed il flusso incidente e leghi la geometria delle pale con le forze generate
 - Calcolare la geometria per realizzare la spinta voluta (progetto)
 - Calcolare le forze generate da una geometria nota (verifica)



Evoluzione delle Teorie dell'Elica

Teoria impulsiva

- **1865 Rankine**
- 1888 Greenhill
- 1889 R.E. Froude
- 1920 Betz

Teoria dell'elemento di pala

- 1878 W. Froude
- **1920 Drzewiecki**

Le due teorie sono complementari

Teoria della linea portante

- Betz e Prandtl (Kutta-Žoukovsky per interrelazione tra variazione quantità di moto e forze su elemento di pala)
- **1907 Lanchester** (velocità indotte)
- **1918 Prandtl**
- 1919 Betz (elica ottimale)
- 1929 Goldstein (fattori per no. di pale)
- 1942 Lerbs (elica adattata alla scia)
- 1950 Strecheletzky (fattori di induzione)



Evoluzione delle Teorie dell'Elica

Teoria della superficie
portante

→ 1944 Ludwig & Ginzler

Vortici concatenati

→ Gullioton

→ Strečelezky

→ Kerwin

→ English

*Distribuzione continua dei
vortici*

→ Ludwig e Ginzler

→ Pien

→ Sparenberg

→ Yamazaki



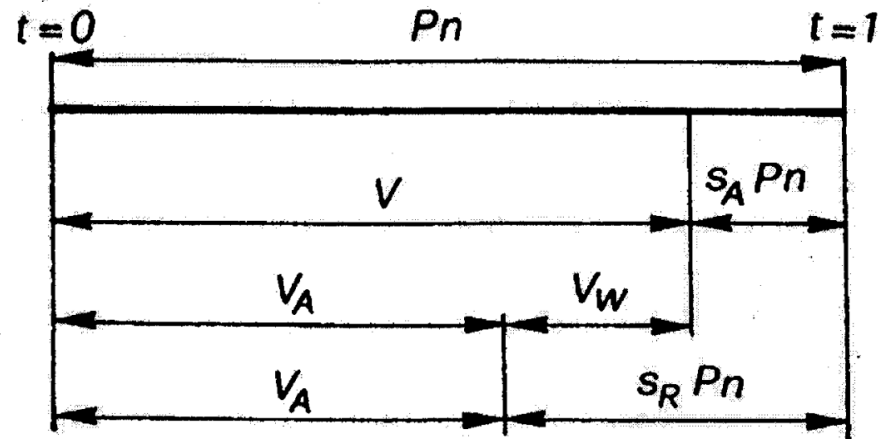
Teoria del Regresso

- Falso concetto vite-madrevite che determina la forma delle prime eliche (es. Ressel)
- nP : velocità nell'ipotesi di vite-madrevite
- V : velocità nave
- Velocità di scia: $V_w = V \cdot w$
- Velocità di avanzo: $V_A = V - V_w = V(1 - w)$
- Regresso apparente:

$$s_A = 1 - \frac{V}{nP}$$

- Regresso reale:

$$s_R = 1 - \frac{V_A}{nP}$$



$$\text{Rendimento: } \eta = \frac{T \cdot V_A}{T \cdot nP} = 1 - s_R$$



Teoria Impulsiva Assiale

- Elica come **disco attuatore** (definito solo dall'area A_0) che causa una discontinuità Δp sulla pressione del fluido

- La spinta è uguale alla variazione della quantità di moto

$$T = \Delta M = \rho A_0 V_1 (V_S - V_A) = \rho A_0 V_1 u_A$$

- La spinta si esprime anche come

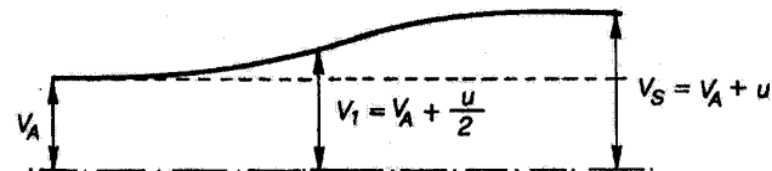
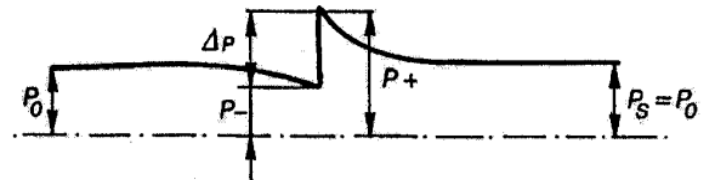
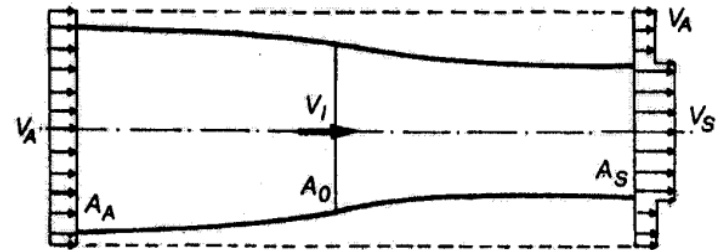
$$T = \int_{A_0} \Delta p \cdot dA_0 = \Delta p \cdot A_0$$

dove applicando il teorema di Bernoulli:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (V_S^2 - V_A^2)$$

- Uguagliando si ha la velocità assiale sul disco attuatore

$$V_1 = \frac{V_A + V_S}{2}$$



Teoria Impulsiva Assiale

- **Potenza utile**

$$P_T = T \cdot V_A$$

- **Potenza assorbita** (dovuta alla generazione della velocità indotta $u_A = V_S - V_A$)

$$P_D = T \cdot V_1 = TV_A + \frac{1}{2} \rho A_S V_S u_A^2 = \frac{1}{2} \rho A_S V_S (V_S^2 - V_A^2)$$

- **Coefficiente di carico di spinta**

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho A_0 V_A^2} = \frac{u_A}{V_A} \left(2 + \frac{u_A}{V_A} \right) \rightarrow \frac{u_A}{V_A} = -1 + \sqrt{1 + C_T}$$

Rendimento Ideale

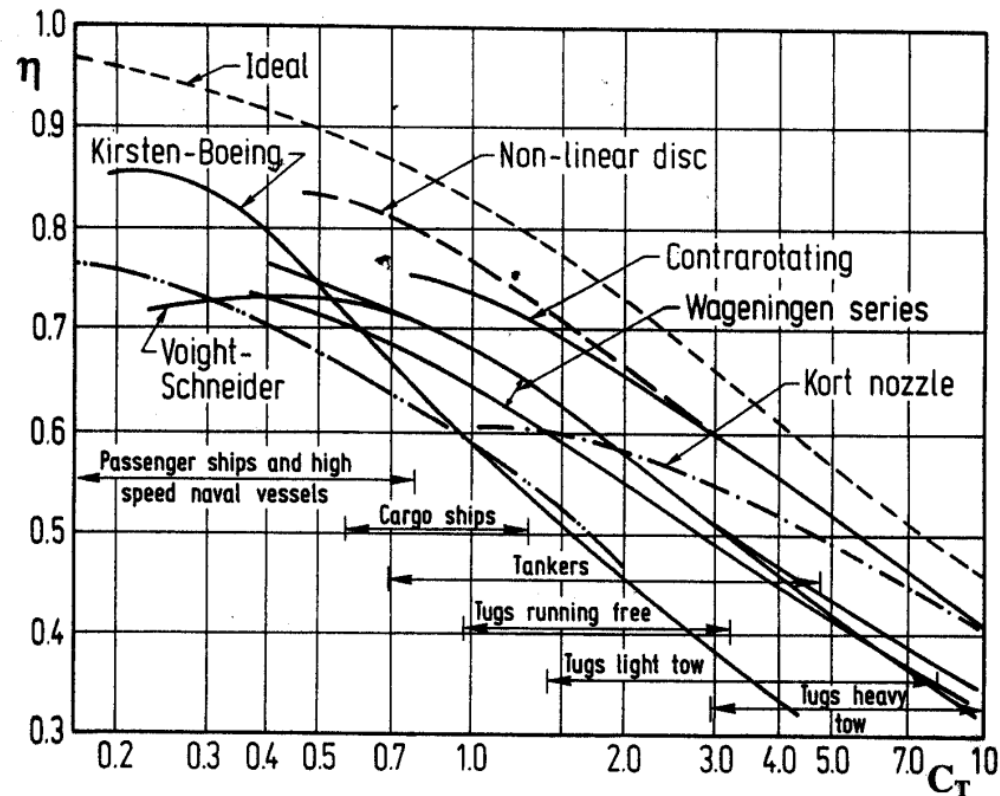
(rendimento reale: 17-20% minore del rendimento ideale)

$$\eta_i = \frac{P_T}{P_D} = \frac{V_A}{V_A + u_A/2} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + C_T}}$$



Teoria Impulsiva Assiale

- La teoria si basa su principi fisici corretti
- Non considera la geometria delle pale. Non utilizzabile per il progetto.
- Introduce i concetti di coefficiente di carico e di rendimento ideale in fluido incompressibile e non viscoso
- Rendimento ideale: limite superiore teorico per qualsiasi elica reale



Teoria Impulsiva Assiale e Tangenziale

- Si ipotizza che, insieme alla variazione assiale della quantità di moto, l'elica induca anche una **variazione nel momento della quantità di moto (che risulta in velocità indotte tangenziali)**
- Il disco attuatore ruota a velocità ω e avanza nel fluido a velocità V_1 , assorbe il momento torcente Q e trasmette la spinta T
- Per il **principio di conservazione dell'energia** si può scrivere

$$Q\omega = TV_A + Q_1\omega_T = TV_A + I_S\omega_S\omega_T \cong TV_A + I_0\omega_T^2$$

- La **velocità angolare indotta** vale quindi

$$\omega_T = \sqrt{\frac{Q\omega - TV_A}{I_0}}$$



Teoria Impulsiva Assiale e Tangenziale

Rendimento Ideale

$$\eta_i = \frac{TV_A}{Q\omega} = \frac{V_A}{V_A + u_A/2} \cdot \frac{\omega - \omega_T}{\omega}$$

Ad un generico raggio il rendimento ideale vale

$$\eta_i = \frac{V_A}{\omega r} \cdot \frac{\omega r - u_T}{V_A + u_A/2}$$

con:

$$u_T = \omega_T r$$



Teoria impulsiva dell'elemento di pala

- Pietra miliare per la progettazione dell'elica: contiene le idee di base che danno origine alle moderne teorie
- L'elica è modellata con un numero finito di pale costituite da sezioni cilindriche costituite da profili alari bidimensionali indipendenti da quelli contigui
- Le forze elementari agenti su ciascuna sezione si calcolano in base alle caratteristiche aerodinamiche derivate da prove alla galleria del vento
- **Velocità indotte:** componenti assiale, tangenziale e radiale dovute all'accelerazione. Vanno sommate alla velocità del flusso indisturbato per ottenere il vettore della reale velocità incidente il profilo alare
- Calcolo delle velocità indotte: si applica la teoria impulsiva per calcolare la variazione di quantità di moto (assiale e tangenziale) causata dall'azione del fluido su ciascuna sezione di pala. Complesso processo iterativo



Teoria impulsiva dell'elemento di pala

Limiti della teoria

- Calcoli statici: il campo di flusso intorno all'elemento di pala è sempre in equilibrio ed accelera istantaneamente quando lo attraversa
- L'elemento di pala è bidimensionale: si trascura la mutua interferenza non consentendo di valutare l'influenza del numero delle pale e della loro geometria sulle velocità indotte
- Si trascura la componente radiale della velocità indotta
- Le ipotesi semplificative limitano l'utilizzo ad eliche con modesti coefficienti di carico



Teoria impulsiva dell'elemento di pala

Si definiscono i *coefficienti di portanza* C_L e di *resistenza* C_D e l'angolo γ

$$C_L = \frac{dL}{\frac{1}{2} \rho V_R^2 \cdot c \, dr} \quad C_D = \frac{dD}{\frac{1}{2} \rho V_R^2 \cdot c \, dr} \quad \tan \gamma = \frac{C_D}{C_L}$$

Da cui si ricava la spinta e momento elementare

$$dT = \frac{1}{2} \rho C_L V_R^2 \cdot c \, dr \frac{\cos(\beta_I + \gamma)}{\cos \gamma}$$

$$dQ = \frac{1}{2} \rho C_L V_R^2 \cdot c \, dr \frac{\sin(\beta_I + \gamma)}{\cos \gamma} \cdot r$$



Teoria impulsiva dell'elemento di pala

Spinta totale

$$T = Z \int_{r_h}^R dT dr = \int_{r_h}^R (dL \cos \beta_I - dD \sin \beta_I) dr$$

Momento torcente totale

$$Q = Z \int_{r_h}^R dQ dr = \int_{r_h}^R (dL \sin \beta_I + dD \cos \beta_I) \cdot r dr$$

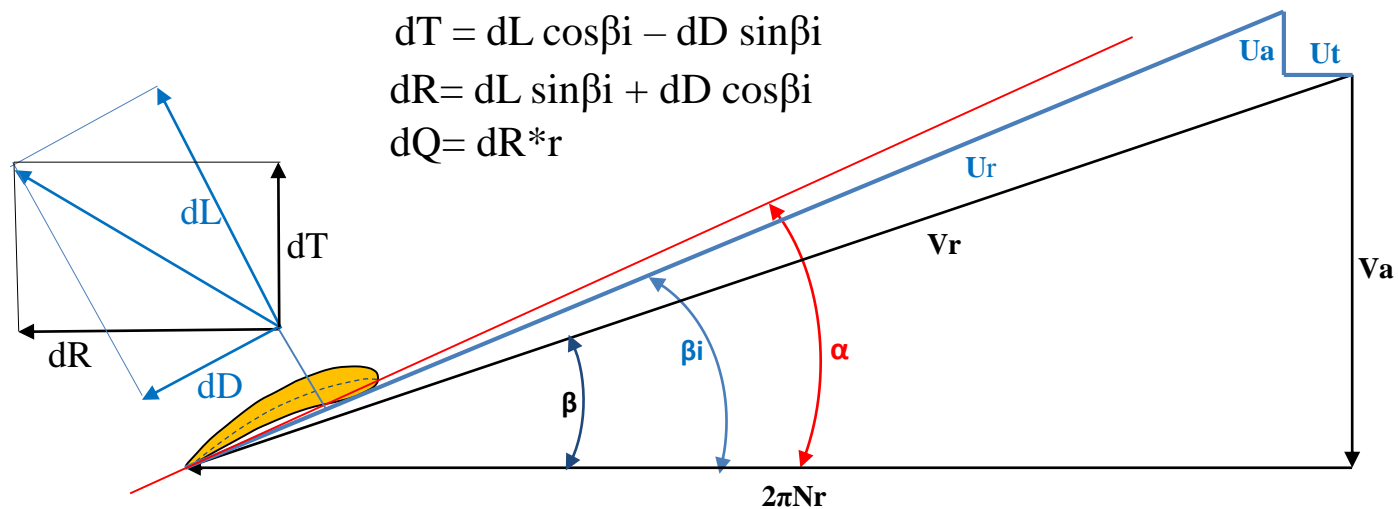
$$\text{Rendimento dell'elica: } \eta = \frac{TV_A}{2\pi nQ}$$

Z: numero delle pale



La velocità indotta

- V_r : velocità del flusso indisturbato
- U_a , U_t : velocità indotte
- U_r : velocità reale incidente il profilo
- α : angolo di passo geometrico
- β : angolo d'avanzo
- β_i : angolo di passo idrodinamico
- $\Delta = (\alpha - \beta_i)$: angolo d'incidenza reale sul profilo
- $dD/dL = \text{tg}(\gamma)$
- $\eta_i = dT \cdot Va / dQ \cdot 2\pi N r = \text{tg}\beta / \text{tg}(\beta_i + \gamma)$: rendimento dell'elemento di pala



Teoria vorticale

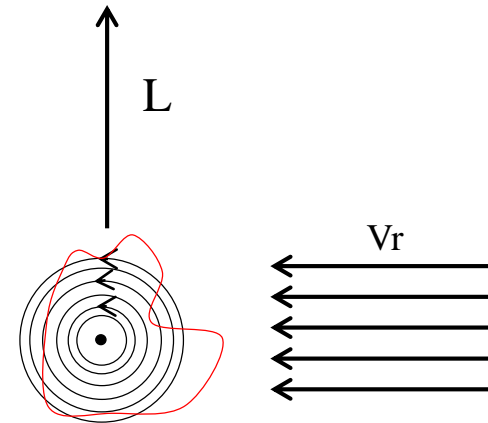
- E' la base della moderna teoria dell'elica introdotta nel 1907 da Lanchester, ripresa e sviluppata su basi matematiche da Betz e Prandtl nel 1918
- Conseguente sviluppo dei modelli matematici:
 - Teoria della linea portante (Prandtl (1918), Betz (1919), Goldstein (1929), Lerbs (1942))
 - Teoria della superficie portante (Ludwig & Ginzel (1944), Pien, Kervin & Leopold)



Teoria vorticale

Legge di Kutta Jukovski

- In un fluido ideale un vortice investito da una corrente di velocità V_r genera una portanza $L = \rho \Gamma V_r$
- Γ : circuitazione del vortice
- ρ : densità del fluido
- G : circuitazione adimensionalizzata
- D : diametro elica
- V : velocità nave



$$L = \rho \Gamma V_r$$

$$\Gamma = \int v \cos \alpha \, ds$$

$$G = \Gamma / \pi D V_r$$



Linea portante

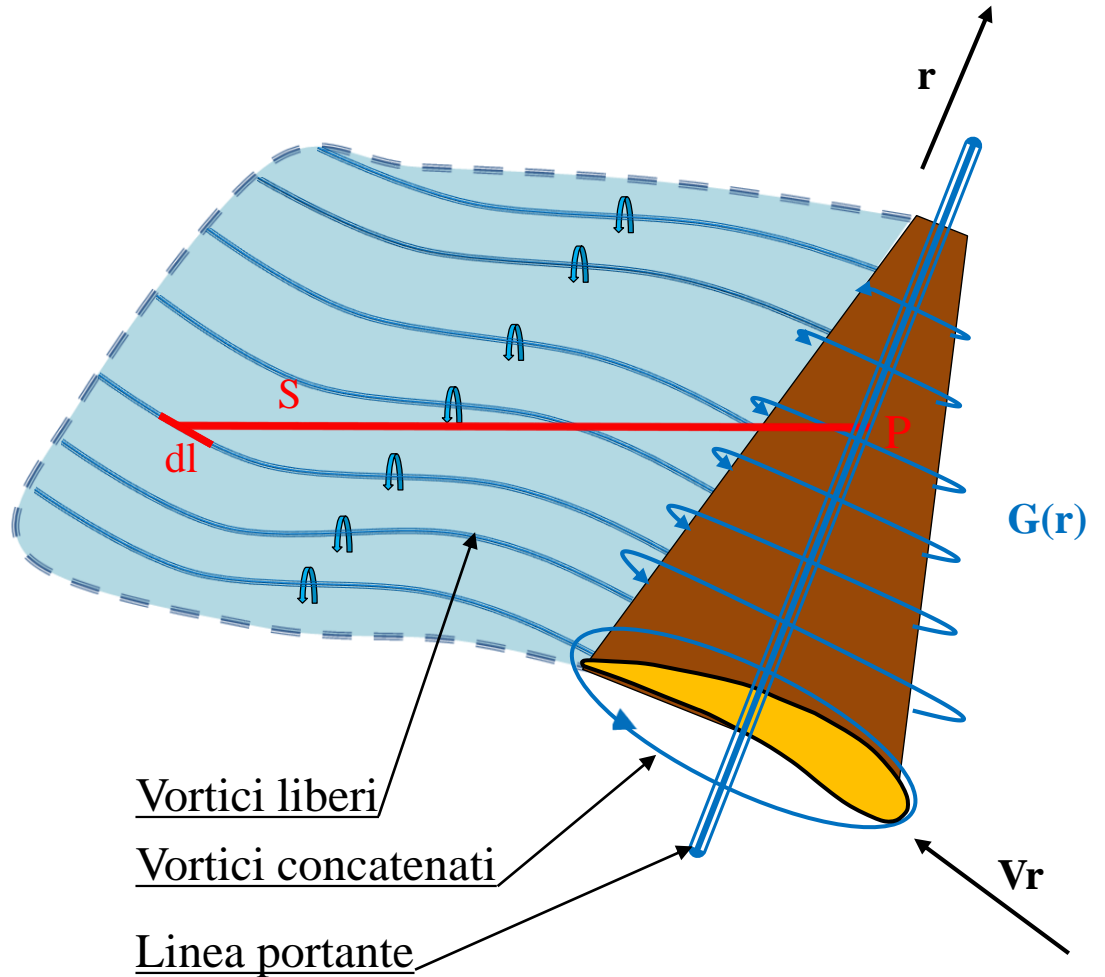
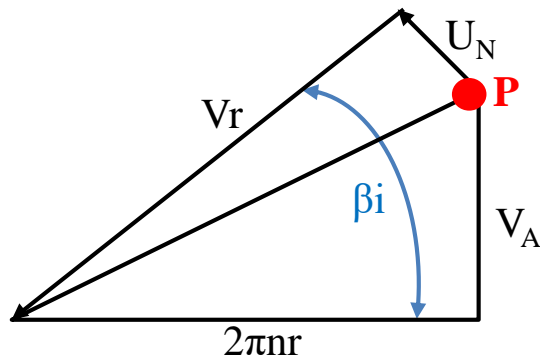
- L'interazione tra elica e fluido è modellata matematicamente dall'interazione del sistema vorticoso equivalente all'elica con il fluido stesso in base alla legge di Kutta Jukovski
- Una sezione di pala al raggio r è rimpiazzata da un vortice di lunghezza infinitesima con circuitazione $G(r)$
- La pala è sostituita da una linea vorticoso, detta linea portante, costituita da un sistema di vortici concatenati con distribuzione variabile di circuitazione $G(r)$, i quali generano il carico idrodinamico
- Tra due sezioni adiacenti si stacca un vortice (vortice libero) con circuitazione $dG(r)/dr$ che abbandona la linea portante lungo una linea elicoidale con angolo di passo β_i
- L'insieme dei vortici liberi giace su una superficie elicoidale
- I vortici liberi danno origine alle velocità indotte, calcolabili in ogni punto della linea portante con la legge di Biot e Savart applicata a tutti i vortici liberi di tutte le pale



Linea portante

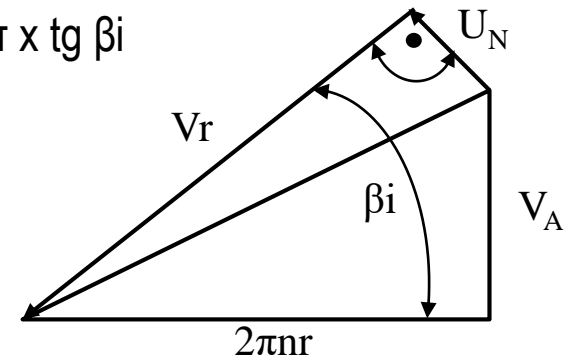
$$\Phi(r) = dG(r)/dr$$

$$U_N = (\Phi(r)/4\pi) \int (dl \wedge S)/S^3$$

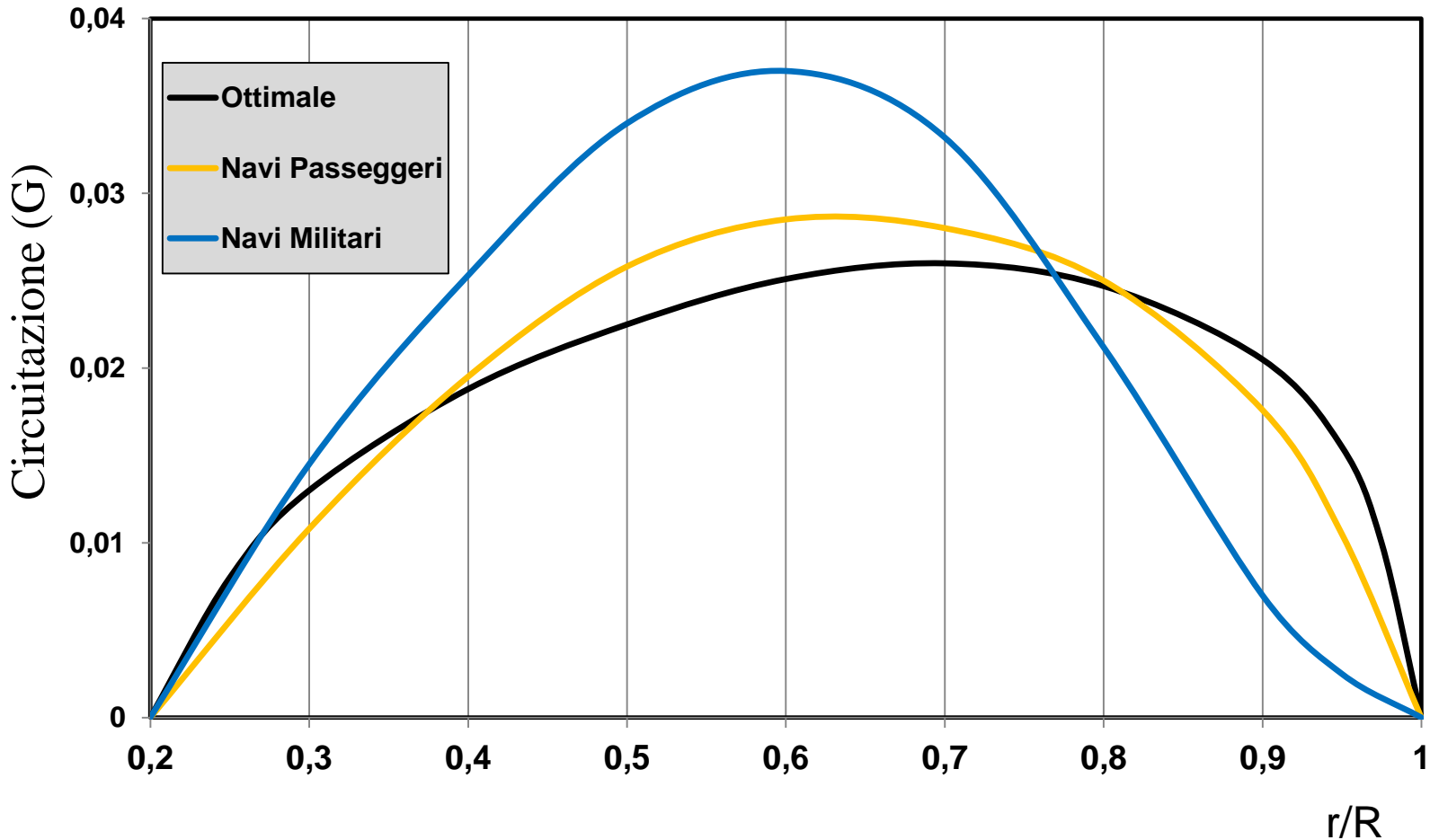


Caratteristiche e vantaggi della linea portante

- L'angolo di passo idrodinamico β_i , le velocità indotte, la circuitazione concatenata sono mutuamente dipendenti per cui il calcolo richiede un procedimento iterativo
- Si può assegnare un'arbitraria distribuzione radiale di circuitazione
- Calcolo delle velocità indotte e di β_i ad ogni sezione di pala e del rendimento ideale in funzione del numero delle pale e della distribuzione radiale di carico scelta dal progettista
- Coefficiente di portanza di ogni sezione: $C_L = 2G/CV_r$
- Distribuzione di carico ottimale: massimizza il rendimento ideale (Betz, Lerbs)
 - In flusso uniforme (V_A costante lungo il raggio) la velocità indotta è ortogonale alla linea del passo idrodinamico
 - Rapporto passo idrodinamico – diametro: $P_{idr}/D = \pi \times \text{tg } \beta_i$
 - P_{idr}/D costante in flusso uniforme (V_A costante)
 - P_{idr}/D varia con r in flusso disuniforme



Distribuzione arbitraria del carico radiale



Geometria del profilo di pala

- T: spinta per pala, dato di progetto
- dT: spinta elementare distribuita lungo il raggio con criterio arbitrario
- $dT = \frac{1}{2} \rho C_L V_R^2 \cdot C dr \frac{\cos(\beta_i + \gamma)}{\cos \gamma} \longrightarrow C_L \quad \gamma = \tan^{-1}(C_D/C_L) (1^\circ \div 6^\circ)$
- **p**: quota di portanza generata da curvatura (0,85 ÷ 1,0)
- Angolo d'incidenza: $\alpha = \alpha_2 + \alpha_i = \frac{C_L(1-p)}{2\pi\eta} + \alpha_{id} C_L p$
 - $\alpha_{id} = 1,54^\circ$ (linea media NACA a=0.8)
 - $\eta = 1 - k(t/C)$ (k = 0,61 per profilo NACA 16 - k = 0,83 per profilo NACA 66)
- Curvatura (camber): $f/C = 0,0679 C_L p$ (linea media NACA a=0.8)



Limiti della linea portante

- Non considera la componente radiale della velocità indotta
- Applicabile solo ad eliche moderatamente caricate
- Il rendimento non considera le perdite per viscosità
- Stabilisce i parametri idrodinamici globali della pala
- Non calcola la distorsione del flusso causata dalla superficie delle pale e della loro mutua interferenza. Si trascura l'effetto tridimensionale
- Il calcolo del passo e della curvatura si basa sulla teoria dei profili bidimensionali
- Necessità di fattori correttivi di passo e curvatura bidimensionali (Morgan, Silovic, Denny):
 - Angolo d'attacco e curvatura sono maggiori rispetto a quanto richiesto in flusso bidimensionale per produrre la stessa portanza
 - Lo spessore del profilo richiede un ulteriore incremento dell'angolo d'attacco per mantenere lo stesso carico



La superficie portante

- Superficie di forma identica a quella della pala reale, rappresentata da una lamina senza spessore le cui sezioni sono adagate su un'elicoide con angolo di passo β_i
- Su ogni sezione la circuitazione $G(r)$ è distribuita lungo la corda ed il sistema vorticoso è quindi composto da tre insiemi
 - Vortici radiali concatenati con circuitazione $G_r(r,c)$
 - Vortici liberi aderenti che si staccano dai vortici radiali e giacciono sulla superficie portante
 - Vortici liberi che si staccano dai vortici radiali e giacciono su una superficie elicoidale che si estende dal bordo d'uscita all'infinito
- I sistemi vorticosi liberi generano in ogni punto della superficie portante una velocità indotta composta da due elementi
 - Velocità indotta dai vortici liberi a valle del bordo d'uscita (calcolo a linea portante)
 - Velocità indotta dai vortici liberi aderenti, responsabile dell'effetto tridimensionale, cioè di un'ulteriore distorsione del flusso rispetto a quanto calcolato con la linea portante
 - La distorsione genera la linea media del profilo necessaria a realizzare la spinta richiesta con la desiderata distribuzione di carico sia lungo il raggio che lungo la corda
- Effetto spessore: tende ad aumentare l'angolo d'attacco (Kervin, Leopold)



La superficie portante

$$G(r) = \int G_r(r,c) \, dc$$

$$U_P(r,c) = U_N(r) + U_{PL}(r,c)$$

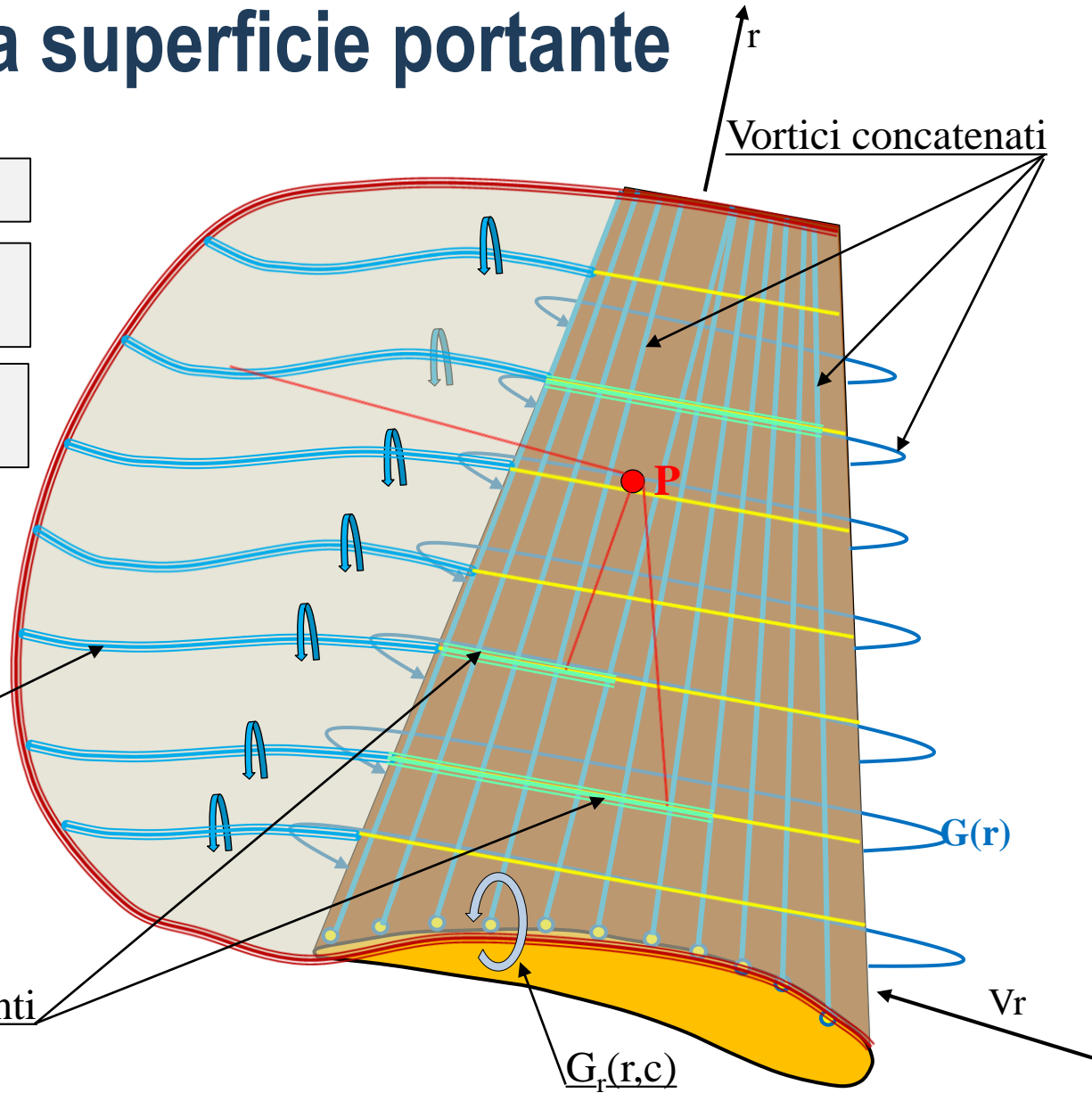
velocità indotta dal carico

$$U_t(r,c) : \text{velocità indotta dallo spessore}$$

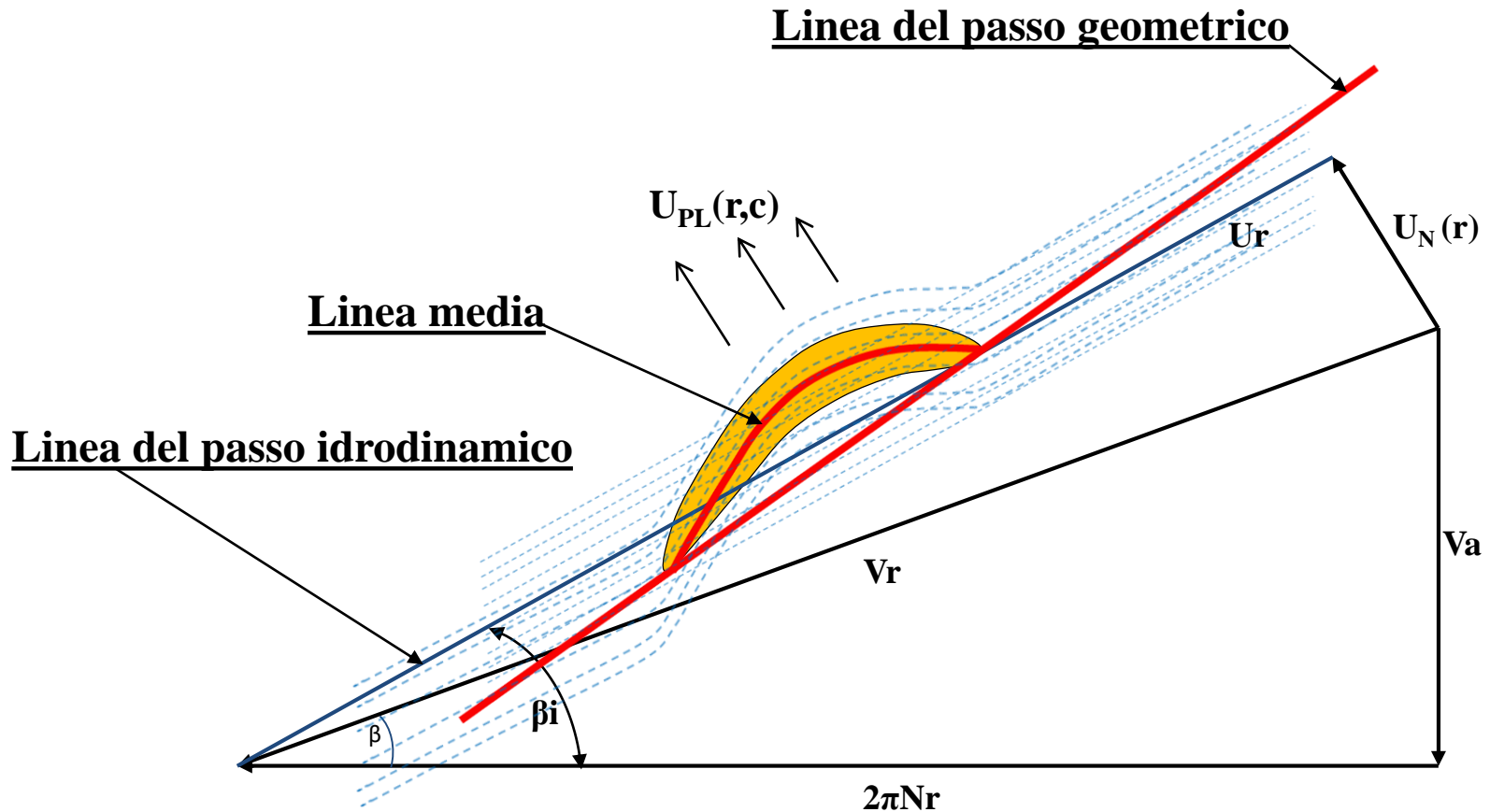
Vortici liberi

Vortici liberi aderenti

Vortici concatenati



La superficie portante



Calcolo della curvatura

CAMBER RATIO													
X/LT													
.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0125	.0071	.0043	.0028	.0025	.0117	.0013	.0012	.0013	.0015	.0016	.0016	.0016	.0014
.0250	.0139	.0084	.0054	.0047	.0132	.0025	.0024	.0025	.0028	.0031	.0031	.0031	.0029
.0500	.0266	.0157	.0099	.0087	.0159	.0046	.0045	.0046	.0052	.0057	.0061	.0061	.0060
.0750	.0365	.0222	.0138	.0122	.0180	.0063	.0060	.0063	.0073	.0080	.0086	.0086	.0092
.1000	.0495	.0279	.0171	.0151	.0193	.0077	.0074	.0079	.0091	.0101	.0111	.0111	.0122
.2000	.0875	.0456	.0261	.0230	.0136	.0111	.0113	.0122	.0147	.0166	.0197	.0197	.0231
.3000	.1176	.0577	.0305	.0266	.0144	.0120	.0133	.0149	.0165	.0216	.0255	.0255	.0313
.4000	.1403	.0650	.0311	.0267	.0121	.0109	.0136	.0163	.0210	.0255	.0306	.0306	.0372
.5000	.1553	.0673	.0261	.0234	.0172	.0076	.0130	.0166	.0224	.0281	.0340	.0340	.0414
.6000	.1628	.0649	.0216	.0166	-.0102	.0029	.0109	.0160	.0227	.0296	.0364	.0364	.0445
.7000	.1625	.0576	.0116	.0070	-.0100	-.0036	.0076	.0143	.0219	.0301	.0379	.0379	.0465
.8000	.1522	.0436	-.0031	-.0067	-.0226	-.0122	.0027	.0113	.0197	.0290	.0365	.0365	.0474
.9000	.1296	.0216	-.0235	-.0252	-.0391	-.0233	-.0040	.0066	.0156	.0275	.0376	.0376	.0466
.9500	.1146	.0087	-.0356	-.0355	-.0479	-.0293	-.0076	.0039	.0132	.0260	.0366	.0366	.0457
1.0000	.1002	-.0031	-.0454	-.0446	-.0557	-.0347	-.0113	.0016	.0111	.0247	.0356	.0356	.0449



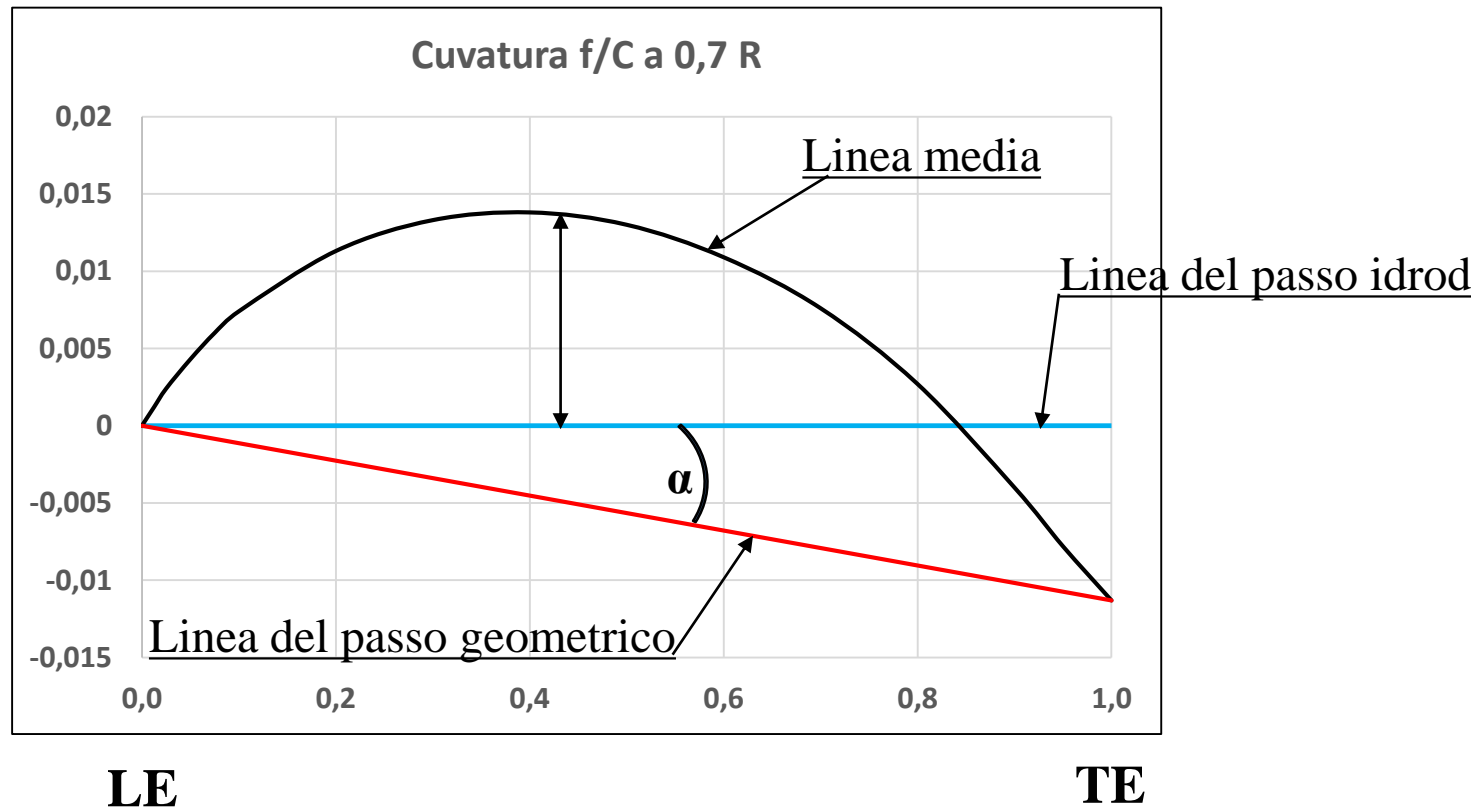
Calcolo della curvatura

X/LT	1.0000	.1000	-.0001	-.0454	-.0440	-.0001	-.0341	-.0113	.0016	.0111	.0241	.0000	.0447
	CAMBER RATIO DUE TO THICKNESS												
	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	.0000	.0000	.0000										
	.0125	-.7803-03	-.5708-03	-.4907-03	-.4040-03	-.2762-03	-.1718-03	-.7760-04	-.3239-04	-.2010-04			
	-.0000	-.1082-04	-.5173-04										
	.0250	-.1521-02	-.1145-02	-.9703-03	-.7929-03	-.5455-03	-.3310-03	-.1498-03	-.6372-04	-.3963-04			
	-.0000	-.1877-04	-.9305-04										
	.0500	-.2904-02	-.2284-02	-.1892-02	-.1525-02	-.1060-02	-.6167-03	-.2811-03	-.1238-03	-.7801-04			
	-.0000	-.2892-04	-.1528-03										
	.0750	-.4184-02	-.3386-02	-.2757-02	-.2198-02	-.1540-02	-.8660-03	-.3987-03	-.1011-03	-.1166-03			
	-.0001	-.3520-04	-.1933-03										
	.1000	-.5388-02	-.4434-02	-.3571-02	-.2814-02	-.1982-02	-.1086-02	-.5060-03	-.2366-03	-.1561-03			
	-.0001	-.4091-04	-.2243-03										
	.2000	-.9735-02	-.8056-02	-.6300-02	-.4816-02	-.3391-02	-.1763-02	-.8691-03	-.4485-03	-.3269-03			
	-.0002	-.8476-04	-.3578-03										
	.3000	-.1360-01	-.1108-01	-.8405-02	-.6317-02	-.4345-02	-.2242-02	-.1163-02	-.6544-03	-.5088-03			
	-.0004	-.1408-03	-.5790-03										



Calcolo della curvatura

Il calcolo a superficie portante determina le ordinate della curvatura rispetto alla linea del passo idrodinamico. La linea congiungente il bordo di entrata con quello di uscita è la linea del passo geometrico



Proprietà e vantaggi della superficie portante

- Calcola in modo rigoroso il passo e la curvatura del profilo, considerando la geometria completa della pala (corda, skew, spessore) e la distribuzione del carico
- E' possibile assegnare una qualsiasi distribuzione di carico sia radiale che circonferenziale per controllare i fenomeni cavitativi
- E' possibile suddividere il carico sulla sezione tra curvatura ed incidenza per controllare la distribuzione di pressione lungo la corda
- Non considera la viscosità
- Calcolo dell'effetto spessore complesso e non accurato per spessori notevoli

