Lezione 6

$f: X \to \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow$ $f^{-1}(u) = \{x \in X \mid f(x) = u\} \subset X$ chiuso perché $\{u\} \subset \mathbb{R}$ è chiuso.

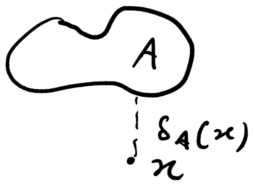
Si ha anche che $L: f(x) \geq u$ è chiuso in X perché $[u, +\infty[$ chiuso in $\mathbb{R}$ e $L = f^{-1}([u, +\infty[)$.

Quindi i sottoinsiemi definiti da <u>equazioni</u> o <u>disequazioni non strette</u> $(\geq, \leq)$ a valori reali continue, sono chiusi.

Prop Sia (X, d) spazio metrico, $\emptyset \neq A \subset X$.
Allora

$$\delta_A : X \to \mathbb{R}$$

$$\delta_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a)$$



è continua.

Def $\delta_A(x)$ è detta distanza di x da A. Si scrive anche $\delta_A(x) = d(x, A)$. Più in generale si definisce la distanza tra sottoinsiemi non vuoti $A, B \subset X$

$$d(A, B) := \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b) \geq 0.$$

Dim $\forall x, y \in X$, $\forall a \in A$, $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y)$

e prendendo l'$\inf_{a \in A}$ $\rightsquigarrow$ $\delta_A(y) \leq \delta_A(x) + d(x, y)$

$\Longrightarrow$ $|\delta_A(x) - \delta_A(y)| \leq d(x, y)$ $\rightsquigarrow$ $\delta = \varepsilon$.

Chiusura negli spazi metrici

Teorema (X,d) spazio metrico, $\emptyset \neq A \subset X \Rightarrow$

$$Cl_X A = \{x \in X \mid d(x,A) = 0\},$$

cioè i punti della chiusura di A sono precisamente quelli a distanza 0 da A.

Dim Poniamo $L = \{x \in X \mid d(x,A) = 0\} = \delta_A^{-1}(0)$

$\Rightarrow L$ chiuso e $A \subset L \Rightarrow Cl_X A \subset L$.

Mostriamo che $L \subset Cl_X A$.

$\forall x \in L$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$ t.c. $d(x,a) < \varepsilon$ dato che

$$0 = \delta_A(x) = \inf_{a \in A} d(x,a)$$

$\Rightarrow a \in B_d(x;\varepsilon) \Rightarrow B_d(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Pertanto $x \in Cl_X A$.

Corollario $\emptyset \neq A \subset (X,d)$ chiuso.

Allora $x \in A \Leftrightarrow d(x,A) = 0$.

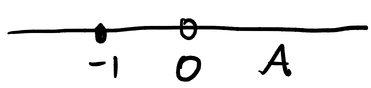
OSS In generale non è detto che esista $\bar{a} \in A$ t.c.

$$d(x,\bar{a}) = d(x,A)$$

(punto di minima distanza).

ES. $X = \mathbb{R} - \{0\}$, $A =]0,+\infty[\subset X$ chiuso

$d(-1,A) = 1$ ma $\nexists\, \bar{a} \in A$ t.c. $d(-1,\bar{a}) = 1$



Def $f : X \to Y$ è detta:

1) <u>omeomorfismo locale</u> se $\forall\, x \in X$ $\exists\, U \subset X$ intorno aperto di x e $\exists\, V \subset Y$ intorno aperto di $f(x)$ t.c. $f(U) \subset V$ e

$$f|_U : U \to V \quad \text{omeo} ;$$

2) <u>immersione</u> (<u>embedding</u>) se $f| : X \to f(X)$ omeo, dove $f(X) \subset Y$ ha la topologia di sottospazio di Y (X si <u>immerge</u> in Y);

3) <u>immersione locale</u> (<u>immersion</u>) se $\forall\, x \in X$ $\exists\, U \subset X$ intorno aperto di x t.c. $f|_U : U \to Y$ immersione (X si <u>immerge localmente</u> in Y).

OSS 1) X si immerge in Y (in simbolo $X \hookrightarrow Y$) $\Longleftrightarrow$ X è omeomorfo ad un sottospazio di Y

2) $f : X \to Y$ omeo loc. e biiettiva $\Longrightarrow$ f omeo $\boxed{E}$

Teorema X metrizzabile e $Y \cong X$ $\Rightarrow$ Y metrizzabile.

Dim d_X distanza su X che ne induce la topologia,

$f : Y \xrightarrow{\cong} X$ omeo $\rightsquigarrow$ $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$

$$d_Y(y_1, y_2) := d_X(f(y_1), f(y_2))$$

distanza su Y. Inoltre f omeo rispetto a $\mathcal{T}_{d_Y}$ $\boxed{E}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{T}_{d_Y}$ coincide con la topologia di Y.

Corollario X metrizzabile e $Y \hookrightarrow X$ $\Rightarrow$ Y metrizzabile.

Def $f: Y \to (X, d_X)$ omeo o immersione $\rightsquigarrow$ d_Y distanza indotta da f.

Def Una proprietà $\mathcal{P}$ di spazi topologici è detta proprietà topologica se $\forall$ spazio X che soddisfa $\mathcal{P}$ e $\forall$ spazio Y t.c. $Y \cong X \Rightarrow Y$ soddisfa $\mathcal{P}$.

In altre parole le proprietà topologiche sono quelle proprietà che si preservano per omeomorfismi.

Es Il teorema dice che la metrizzabilità è una proprietà topologica.

Def Una proprietà topologica $\mathcal{P}$ è detta essere ereditaria se $\forall$ spazio X che ha $\mathcal{P}$ e $\forall\, Y \subset X$ sottospazio $\Rightarrow Y$ ha $\mathcal{P}$.

Es La metrizzabilità è ereditaria.

Def (X, d) spazio metrico. Si chiama diametro di X

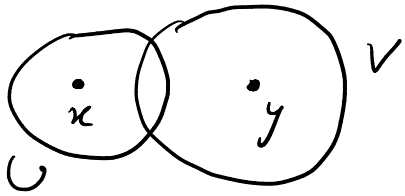
$$\operatorname{diam} X := \sup_{x, y \in X} d(x, y) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Es diam X non è una proprietà topologica, infatti $\operatorname{diam} \mathbb{R}^n = \infty$, $\operatorname{diam} \mathring{B}^n = 2$ ma $\mathbb{R}^n \cong \mathring{B}^n$ con $\mathring{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$, $n \geq 1$.

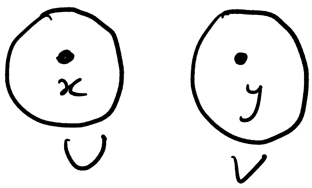
Assiomi di separazione

Def Uno spazio topologico X è detto

T_1 se $\forall x, y \in X$, $x \neq y$,
$\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c.
$x \in U - V$ e $y \in V - U$



T_2 (o di Hausdorff) se
$\forall x, y \in X$, $x \neq y$,
$\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c
$U \cap V = \emptyset$, $x \in U$, $y \in V$.

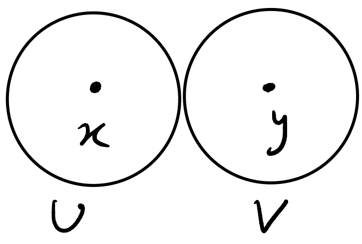


Oss $T_2 \Rightarrow T_1$
$\not\Leftarrow$

Controesempio $\mathbb{R}_{cof}$ è T_1 ma non T_2
infatti $\forall x \neq y \in \mathbb{R}_{cof}$ $U = \mathbb{R} - \{y\}$, $V = \mathbb{R} - \{x\}$
ma $\forall$ due aperti $\neq \emptyset$ hanno intersezione $\neq \emptyset$.

Prop Metrizzabile $\Rightarrow T_2$

Dim (X, d) spazio metrico, $x \neq y \in X$, $r = d(x, y)$
$U = B_d(x; \frac{r}{2})$, $V = B_d(y; \frac{r}{2})$.



Prop T_1 e T_2 sono proprietà topologiche ereditarie.

Dim Nel caso T_2. Se X è T_2 e $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ omeo, $\forall\, y_1 \neq y_2 \in Y$
$x_1 = f^{-1}(y_1) \neq x_2 = f^{-1}(y_2) \Rightarrow \exists\; U_1, U_2 \subset X$ aperti t.c.
$U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2 \rightsquigarrow$
$V_1 = f(U_1)$ e $V_2 = f(U_2) \subset Y$ aperti t.c.
$V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2 \Rightarrow Y$ è T_2.
Quindi T_2 è una proprietà topologica. Mostriamo che è ereditaria. Se X è T_2 e $Y \subset X$ sottospazio
$\forall\, x \neq y \in Y \;\; \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $U \cap V = \emptyset$
$x \in U$, $y \in V \rightsquigarrow U' = U \cap Y$, $V' = V \cap Y$ aperti in Y che provano l'enunciato.
La dimostrazione per T_1 è simile.

Es 1) B^n e S^n sono T_2.

2) <u>Retta di Sorgenfrey</u> $\mathbb{R}_\ell$ è $\mathbb{R}$ con la topologia generata dagli intervalli aperti a destra $\mathcal{B} = \{[a, b[\;|\; a < b\}$.
$\mathbb{R}_\ell$ è di Hausdorff (T_2) infatti $\forall\, x < y$,
$x \in [x, y[= U$, $y \in [y, y+1[= V$, $U, V \subset \mathbb{R}_\ell$ aperti e $U \cap V = \emptyset$.

3) Se $\# X > 1 \Rightarrow X_{ban}$ non è T_1 (quindi nemmeno T_2)

Teorema X è $T_1 \iff \{x\} \subset X$ chiuso $\forall x \in X$ (i punti sono chiusi).

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, y \in X - \{x\}\; \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U - V$, $y \in V - U$
$\Rightarrow y \in V \subset X - \{x\}$. $\boxed{\Leftarrow}$ $U = X - \{y\}$, $V = X - \{x\}$.