

Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 1

- 1) Sia $A \subset X$ un sottospazio topologico. Mostrare che se A è chiuso in X e $B \subset A$ è chiuso in A allora B è chiuso in X . Mostrare con un controesempio che non si può togliere l'ipotesi “ A chiuso in X ”.
- 2) Sia $A \subset X$ un sottospazio topologico. Mostrare che se A è aperto in X e $B \subset A$ è aperto in A allora B è aperto in X . Mostrare con un controesempio che non si può togliere l'ipotesi “ A aperto in X ”.
- 3) Dimostrare che la famiglia degli intervalli semiaperti $[a, b[$ per ogni $a < b$, è base per una topologia su \mathbb{R} (detta *topologia degli intervalli aperti a destra*). Denotiamo questo spazio con R_l (retta di Sorgenfrey). Mostrare che gli aperti Euclidei sono aperti in R_l , ma che non vale il viceversa.
- 4) Per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$ poniamo $\|A\| = \sqrt{\text{tr}({}^tAA)}$. Mostrare che questa è una norma su $M_n(\mathbb{R})$, e scriverla esplicitamente ($\text{tr } A$ è la traccia di A , somma delle entrate sulla diagonale principale). Mostrare che esiste un'isometria tra $M_n(\mathbb{R})$ con la distanza indotta da tale norma, e \mathbb{R}^{n^2} con la distanza Euclidea.