FADDEEV-POPOV QUANTIZATION of NON-ABELIAN GAUGE THEORIES

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{Matter}(\psi, D\psi; \phi, D\phi)$$

$a = 1, \dots, \dim G$

$$\frac{\int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}\, O_1 \cdots O_N}{\int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}}$$

Idealmente: calcolare P.I. $\underbrace{\int \mathcal{D}A\, e^{iS[A]}}_{\text{misura : corr.}}$ e poi introducendo correnti esterne, così calcolo il propagatore come l'inverso dell'op. nel termine quadratico

$$\mathcal{L} \supset \int d^4x\, A^a_\mu\, \Omega^{ab\mu\nu} A^b_\nu$$

↳ prop. è Ω^{-1}

Ma Ω NON è INVERTIBILE: questo è dovuto al fatto che Ω ha degli zero-modi ($\mathrm{Ker}\,\Omega \neq 0$)

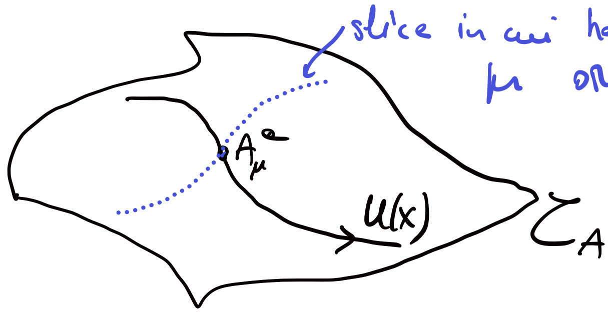
$\longleftrightarrow$ è legato alla ridondanza nelle coord. A^a_μ

Se riuscissimo a integrare nel P.I. sulle classi di equiv. $[A^a_\mu]$ invece che su tutte le config. A^a_μ, allora il problema sparisce perché tutti i vettori in $\mathrm{Ker}\,\Omega$ sono equivalenti a 0.

$$[A^a_\mu] = \{ A'^a_\mu \mid A'^a_\mu \text{ è il trasf. di } A^a_\mu \text{ sotto gauge} \}$$

$\equiv$ ORBITA

slice in cui ho solo UN elem. per ORBITA



Per individuare UN rappresentante per classe di equiv. prendo una funz. $G(A)$ e impongo

$$G(A) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad G^a(A) = 0$$

è rap. Adj (dobbiamo fissare $\# = \dim G$ vettori A_μ^a)

($G(A)$ non deve essere gauge invariante)

Usiamo il seguente trucco (FP) — valido se $\exists!$ soluz. all'eq. $G(A)=0$

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \; \delta(G(A^\alpha)) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right)$$

Generalizzazione di:

$$\delta[f(x)] = \sum_i \left|\frac{df}{dx}\right|^{-1}_{x=x_0^i} \delta(x - x_0^i)$$

Se c'è unica soluz.

$$1 = \int \delta[f(x)] \left|\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} dx$$

$$A_\mu^{\alpha\, a} = A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu \alpha)^a \qquad A_\mu \to g A_\mu$$

Prendiamo $G(A)$ lineare in A $\Rightarrow$ $\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}$ NON DIPENDE DA α!

$$\left[\; \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} = \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta A} \frac{\delta A^\alpha}{\delta \alpha} \;\right]$$

$\Rightarrow \quad \Delta_{FP}(A) \equiv \det \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}$ è INDIP. da α, ma dipende da A (a differenza del caso Abeliano)

$$\int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\alpha \; \delta(G(A^\alpha)) \, \Delta_{FP}(A) \, e^{iS[A]}$$

gauge invariante

$$= \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\alpha \; \delta(G(A^\alpha)) \, \Delta_{FP}((A^\alpha)^{-\alpha}) \, e^{iS[A^\alpha]}$$

Ora facciamo un cambio di VARIABILI di INTEGRAZIONE: def. la nuova variabile $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nuova variabile}}}{B} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{funzione di } A}}{A^\alpha}$

Fortunatamente, la misura è invariante sotto questo cambio (cioè lo Jacobiano è $=1$): $\mathcal{D}B = \mathcal{D}A^\alpha = \underset{=1}{\mathcal{J}}\mathcal{D}A$

$$= \int \mathcal{D}B \int \mathcal{D}\alpha \; \delta(G(B)) \, \Delta_{FP}(B^{-\alpha}) \, e^{iS[B]}$$

$$\Delta_{FP}(B^{-\alpha}) = \det \frac{\delta G((B^{-\alpha})^{\tilde{\alpha}})}{\delta \tilde{\alpha}} \underset{\tilde{\alpha} = \alpha' + \alpha}{=} \det\left(\frac{\delta G(B^{\alpha'})}{\delta \alpha'} \frac{\delta \alpha'}{\delta \tilde{\alpha}} \right) =$$

$$= \Delta_{FP}(B) \; \rho(\alpha)$$

$$\rho(\alpha) = \det\left(\frac{\delta \alpha'}{\delta \tilde{\alpha}}\right)$$

$\shortparallel$

1 per trasf. infinitesima

$$= \left(\int \mathcal{D}\alpha \; \rho(\alpha) \right) \int \mathcal{D}A \; \delta(G(A)) \underbrace{\Delta_{FP}(A)}_{} e^{iS[A]}$$

dipende da A a diff. della teoria abeliana

qui ho sostituito il simbolo B col simbolo A (è una variabile di integrazione)

Questo P.I. <u>non</u> è della forma $\int \mathcal{D}\varphi \, e^{iS(\varphi)}$ e quindi non possiamo applicare in maniera diretta il metodo dei diagrammi di Feynman per calcolare i CORRELATORI.

- L'integrale $\int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]}$ è indip. dalla funzione G (cioè dalla scelta del GAUGE FIXING). Inoltre anche $\int \mathcal{D}\alpha \, \rho(\alpha)$ è indip. da G.

$\Rightarrow \int \mathcal{D}A\, \delta(G(A))\, \Delta_{FP}(A)\, e^{iS[A]}$ è INDIP. da G

- Possiamo moltiplicare e dividere il P.I. per

$$\Big(\int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nella rap. Adj}}}{\mathcal{D}\omega}\; e^{-\frac{i}{2\xi}\int \omega^2} \Big) \qquad \omega^2 \equiv \omega^a \omega^a$$

Ci specializziamo al caso delle GAUGE DI LORENTZ:

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu - \omega \qquad G^a(A) = \partial^\mu A^a_\mu - \omega^a$$

$$\frac{\int \mathcal{D}\omega\, e^{-\frac{i}{2\xi}\int\omega^2}}{\int \mathcal{D}\omega\, e^{-\frac{i}{2\xi}\int\omega^2}} \int \mathcal{D}A\, \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega)\, \Delta_{FP}(A)\, e^{iS[A]}$$

A meno di fattori overall il P.I. diventa

$$\int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\omega\, e^{-\frac{i}{2\xi}\int\omega^2}\, e^{iS[A]}\, \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega)\, \Delta_{FP}(A) =$$

$$= \int \mathcal{D}A\, \Delta_{FP}(A)\, e^{iS[A] - \frac{i}{2\xi}\int (\partial^\mu A_\mu)^2}$$

$\leftarrow$ termine di gauge fixing in $\mathcal{L}$

$(\partial^\mu A_\mu)^2 = \partial^\mu A^a_\mu \partial^\nu A^a_\nu$

come vedremo $\Delta_{FP}(A)$ non contribuisce al propagatore (non genera termini quadratici nella nuova Lagrangiana)

Il termine quadratico in $S + S_{g.f.}$ è: $\qquad \Big[S_{g.f.} \equiv -\frac{1}{2\xi}\int (\partial^\mu A_\mu)^2 \Big]$

$$-\int d^4x \Big(\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})(\partial_\nu A^{a\nu}) \Big)$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\; \Omega^{a\mu, b\nu}(x,y) \cdot A^a_\mu(x) A^b_\nu(y)$$

dove $\Omega^{a\mu, b\nu}(x,y) \equiv \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial y_\rho} \delta^{(4)}(x-y)\, \delta^{ab} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu} \delta^{(4)}(x-y)\, \delta^{ab} =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{ab} \int d^4p \left[\eta^{\mu\nu} (p^2 - i\epsilon) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^\mu p^\nu \right] e^{ip(x-y)}$$

Prendiamo l'inverso di Ω, e otteniamo il PROPAGATORE di Feynman per il BOSONE DI GAUGE

$$D^{ab}_{F\,\mu\nu}(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\eta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \delta^{ab} \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} e^{ip(x-y)}$$

$\xi = 1$: Feynman-'t Hooft

$\xi = 0$: Landau

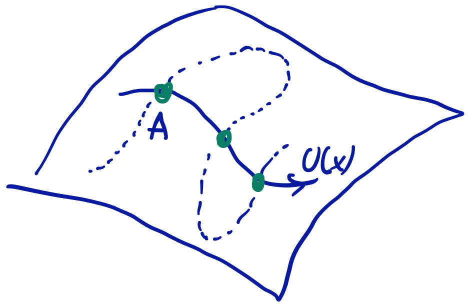
COPIE DI GRIBOV

Cosa vuol dire fissare "bene" la gauge? (Scelta di $G(A)$)

Risposta: $G(A) = 0$ dovrebbe produrre una superficie che interseca ogni orbita di gauge trasversalmente e SOLO in un PUNTO (e tale pto deve esistere)!

L'esistenza di tale superficie dipende delle proprietà globali (topologiche) dello spazio $\mathcal{C}_A / \Omega_*$

Ci saranno problemi quando la superf. $G(A)=0$ interseca le orbite in più di UN pto



ci sono config. gauge-equiv. sulla superf. $G(A)=0$

Detto altrimenti se $G(A)=0$ allora esistono delle funz. $\alpha(x)$ che risolvono l'equazione

$$G(A^\alpha)=0$$

$$G(A^\alpha) = \underbrace{\cancel{G(A)}}_{=0} + \underbrace{\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\bigg|_{\alpha=0}}_{=0} \cdot \alpha + \dots$$

ci dice che $\Delta_{FP}=0$ (cioè $\exists$ zero-modes)

$\Downarrow$

Integrare su tutti i pti della superf. $G(A)=0$ produce un overcounting dei gradi di libertà.

Questo problema è noto come l' AMBIGUITÀ di GRIBOV.

→ È evitabile in teoria Abeliana, ma è inevitabile per le gauge non-singolari nelle teorie non-abeliane.

$G(A)=\partial^\mu A_\mu^a$ gli zero-modi α sono tali che

$$\partial^\mu D_\mu \alpha = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\Box\alpha + [\underbrace{\cancel{(\partial^\mu A_\mu)}}_{=0}, \alpha] + [A_\mu, \partial^\mu \alpha] = 0$$

[In Ramond es. in SU(2)]

Se A_μ è molto piccolo, allora questa eq. non ha soluzioni ($\alpha\to 0$ in $|x|\to\infty$)
(QED non ha copie di Gribov in $G=\partial^\mu A_\mu$)
$\Rightarrow$ l'ambiguità di Gribov non inficia i conti perturbativi.

coinvolgono integrali GAUSSIANI attorno a $A_\mu=0$ molto piccoli per $g\to 0$

DETERMINANTE DI FADDEEV-POPOV e GHOSTS

P.I. : $\int \mathcal{D}A \; \Delta_{FP}(A) \; e^{iS[A] - \frac{i}{2\xi}\int(\partial^\mu A_\mu)^2}$

$$\Delta_{FP}(A) \equiv \det \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \overset{\uparrow}{=} \det\Big[\underbrace{\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu}\Big]$$

$$\frac{\delta(\partial^\mu A^\alpha_\mu)}{\delta\alpha} = \frac{\delta}{\delta\alpha}\left(\partial^\mu\left(\cancel{A_\mu} + D_\mu \alpha\right)\right)$$

automorfismo in

$V_{Adj} \otimes \mathbb{1}_{Lorentz} \otimes \{function\}$

Il determinante di ogni operatore può essere rappresentato da un integrale su oggetti a valori nei numeri di Grassmann :

$$\det M = \int d^n\bar{\xi}\, d^n\xi \; e^{i\bar{\xi}^T M \xi}$$

Abbiamo integrato su un $\xi \in V_n$

M è matrice che agisce su V_n

$$\Delta_{FP}(A) = \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; e^{i\int d^4x\; \bar{c}(x)(-\partial^\mu D_\mu)c(x)}$$

$$c, \bar{c} \in V_{Adj} \otimes \mathbb{1}_{Lorentz} \otimes \{funz.\} \otimes \left\{\begin{array}{c}\text{Grassmann}\\\text{numbers}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ c è un CAMPO SCALARE

nella RAPP. AGGIUNTA a valori nei numeri di Grassmann

Questo campo AUSILIARIO ha la relazione sbagliata tra SPIN e STATISTICA $\longrightarrow$ non può essere associato a particelle FISICHE $\rightarrow$ GHOSTS di FP

P.I. : $\displaystyle\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; e^{\,iS[A] - \frac{i}{2\xi}\int(\partial^\mu A_\mu)^2 + i\int \mathcal{L}_{gh}}$

P.I. scritto nella maniera che ci permette di effettuare regole di Feynman

$$\mathcal{L}_{gh} = \bar{c}\,(-\partial^\mu D_\mu)\,c = \bar{c}^a\left(\delta^{ab}(-\partial^2) + g\,\partial^\mu f^{abc} A_\mu^b\right)c^c$$

osservazione:

La Lagrangiana $\mathcal{L}_{gh}$ (e quindi la Lagrangiana totale) è INVARIANTE sotto

$$c \mapsto e^{i\chi} c \qquad \bar{c} \mapsto e^{-i\chi}\bar{c} \qquad \chi \text{ cost}$$

Sapere simm. di $\mathcal{L}$ è importante perché da info su possibili correlatori

↪ la corrispondente carica conservata si chiama GHOST NUMBER Q_{gh}; è t.c. (usando regole comm. canoniche)

$$\{Q_{gh}, c\} = c \qquad \{Q_{gh}, \bar{c}\} = -\bar{c}$$

$$\text{e} \quad \{Q_{gh}, \varphi\} = 0 \qquad \varphi = \{\text{tutti gli altri campi}\}$$

In termini dei campi

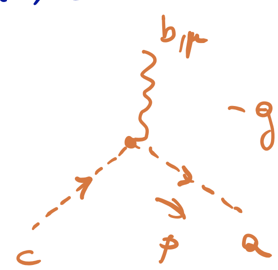
$$Q_{gh} = \int d^3x \left[-\bar{c}^a (D_0 c)^a + \partial_0 \bar{c}^a c^a\right]$$

Regole di Feynman per i Ghosts:

$$\mathcal{L}_{gh} = \bar{c}^a\left(-\partial^2\delta^{ab} + g\,\partial^\mu f^{abc} A_\mu^b\right)c^c$$

$\dfrac{i}{k^2}$

la freccia mostra il flusso del ghost N°



$-g f^{abc} p^\mu$