Geometria 3 — Topologia

Foglio di esercizi 2

1) Sia (X, d) spazio metrico. Per ogni $x \in X$ e $r > 0$, poniamo

$$\overline{B}(x;r) := \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\} \quad \text{(boccia chiusa)}$$
$$S(x;r) := \{y \in X \mid d(x,y) = r\} \quad \text{(sfera)}.$$

Dimostrare che $\mathrm{Cl}_X\, B(x;r) \subset \overline{B}(x;r)$ e $\mathrm{Fr}_X\, B(x;r) \subset S(x;r)$. Dimostrare che in R^n con la distanza Euclidea vale l'uguaglianza in entrambi i casi. Trovare un esempio per cui valgono le inclusioni strette in entrambi i casi.

2) Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici, e siano $A \subset X$ e $B \subset Y$. Dimostrare che $f(\mathrm{Cl}_X(A)) \subset \mathrm{Cl}_Y\, f(A)$ e $\mathrm{Cl}_X\, f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y\, B)$. Esibire un esempio in cui si ha l'uguaglianza e un esempio in cui si ha inclusione stretta.

3) Sia $\phi\colon [0, 2\pi[\ \to S^1$, $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$, dove $S^1 \subset R^2$ è la circonferenza unitaria. Verificare che ϕ è continua e biiettiva ma non è un omeomorfismo.

4) Sia R_l la retta di Sorgenfrey, cioè R con la topologia generata dagli intervalli aperti a destra $[a, b[$, per ogni $a < b$. Dimostrare che gli intervalli $[a, b[$ sono chiusi (oltre che aperti).

5) Consideriamo lo spazio delle matrici quadrate $M_n(R)$ con la topologia Euclidea, indotta da $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$. Mostrare che

   (a) $\mathrm{GL}_n(R)$ è aperto in $M_n(R)$;

   (b) $\mathrm{SL}_n(R)$ è chiuso;

   (c) $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ sono chiusi.