Lezione 8

Matrici Dati due numeri interi positivi m, n, una <u>matrice</u> reale $m \times n$ è una tabella di numeri reali (detti <u>entrate</u>) con m <u>righe</u> e n <u>colonne</u>.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 3 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2×2 $\qquad$ 2×4 $\qquad$ 3×1

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1×4 $\qquad$ 3×2

In una matrice si individuano le <u>righe</u> e le <u>colonne</u>

In modo simile si possono considerare matrici $m \times n$ a entrate complesse o più in generale a entrate in un campo $\mathbb{K}$.

<u>L'insieme di tutte le matrici $m \times n$</u> a entrate in $\mathbb{K}$ si denota con $M_{m,n}(\mathbb{K})$ o anche $\mathbb{K}^{m \times n}$.

Se $m = n$ la matrice è detta matrice quadrata e si pone $M_{m,m}(\mathbb{K}) =: M_m(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{m \times m}$

(insieme di tutte le matrici quadrate $m \times m$ a entrate in $\mathbb{K}$)

<u>Es</u> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} i & 1+i & -i \\ 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{2}\, i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

Consideremo $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. L'entrata di posto (i,j) (i-esima riga, j-esima colonna) si denota con A_{ij}. L'i-esima riga si denota con $A^{(i)}$ e la j-esima colonna con $A_{(j)}$.

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad A_{12} = 3$, $A_{11} = 1$, $A_{23} = 8$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad A_{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Una matrice di tipo $1 \times n$ è detta <u>vettore riga</u>, mentre una di tipo $n \times 1$ è detta <u>vettore colonna</u>. Chiaramente un vettore riga o colonna con n entrate in $\mathbb{K}$ è un vettore di $\mathbb{K}^n$ e considereremo i vettori di $\mathbb{K}^n$ come vettori colonna o riga in base alle esigenze.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ i \end{pmatrix}$ è un vettore colonna complesso di $\mathbb{C}^3$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ è un vettore riga reale.

Una matrice $m \times n$ A con entrate a_{ij} viene anche indicata sinteticamente

$$A = (a_{ij}).$$

Operazioni sulle matrici

Somma $\forall\ A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matrici $m\times n$

Definiamo $A+B := (a_{ij}+b_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{K})$

cioè $A+B$ è ottenuta sommando le entrate corrispondenti di A e di B.

Es $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Moltiplicazione scalare $\forall\ \alpha\in\mathbb{K},\ \forall\ A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{K})$

definiamo $\alpha A := (\alpha a_{ij})$

cioè αA è ottenuta moltiplicando tutte le entrate di A per lo scalare α.

Es $$3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Come per i vettori di $\mathbb{K}^n$, si verifica che le operazioni $+$ e $\cdot$ soddisfano gli 8 assiomi di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Pertanto <u>$M_{m,n}(\mathbb{K})$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.</u>

Si ha $0 := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ <u>matrice nulla</u>

$A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow -A := (-a_{ij})$ <u>opposta di A</u>

Es $$-\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & -14 \end{pmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

1) Prodotto di una riga per una colonna

$$A = (a_1 \ \dots \ a_n) \in M_{1,n}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$AB := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \in \mathbb{K}$$

<u>Es</u> $$(1 \ \ 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 13$$

$$(-2 \ \ 1 \ \ 0)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix} = -8 + 2 = -6$$

2) Caso generale: $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$ definiamo $AB \in M_{m,\ell}(\mathbb{K})$ come la matrice che ha al posto (i,j)

$$(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

Si ha pertanto

$$(AB)_{ij} = A^{(i)} B_{(j)}$$

Cioè nel posto (i,j) di AB c'è il prodotto della i-esima riga di A per la j-esima colonna di B.

<u>NB</u> Due matrici A e B a entrate in $\mathbb{K}$ possono essere moltiplicate solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B.

Es

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 22 & -3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ -1 & 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2+3i & -1+i \\ -2+3i & 2-3i & 3+2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

NB 1) Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$ allora AB è definito e $AB \in M_{m,\ell}(\mathbb{K})$ ma se $\ell \neq m$, BA non è definito!
Se $\ell = m$ allora $BA \in M_n(\mathbb{K})$

2) Se $A, B \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AB$ e BA sono entrambe definite e di tipo $n \times n$ ma <u>non</u> sono in generale uguali, cioè il prodotto di matrici <u>non è commutativo</u>

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}) \quad \text{matrice quadrata } n \times n$$

diagonale principale di A
$(a_{11} \ a_{22} \ \ldots \ a_{nn})$

Matrice identica (o identità)

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

ha 1 nella diagonale principale e 0 altrove

Delta di Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Si ha quindi $I_n = (\delta_{ij})$.

Proprietà del prodotto righe per colonne

1) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha $I_m A = A I_n = A$
(I_n elemento neutro del prodotto)

ES $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dim ($I_m A = A$, l'altra è simile) $\quad A = (a_{ij})$

$$(I_m A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} a_{kj} = \delta_{ii} a_{ij} = a_{ij} \ \forall i,j \implies I_m A = A$$

2) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{n,l}(\mathbb{K})$, $\forall C \in M_{l,s}(\mathbb{K})$

$A(BC) = (AB)C$ proprietà associativa $\leadsto ABC$

(non la dimostriamo, è un po' noioso)

3) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall B, C \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$

$A(B+C) = AB + AC$ proprietà distributiva a sinistra

<u>Dim</u> $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$

$B + C = (b_{ij} + c_{ij})$

$$\left(A(B+C)\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} =$$

$$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \quad \forall i,j \Rightarrow A(B+C) = AB + AC.$$

4) $\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall C \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$

$(A+B)C = AC + BC$ proprietà distributiva a destra

La dimostrazione è simile.

<u>Matrice trasposta</u> $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiamo la trasposta di A, e la denotiamo ${}^tA$, come la matrice ottenuta da A scambiando le righe con le colonne. Pertanto $({}^tA)_{ij} = A_{ji}$ e ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ e ${}^t({}^tA) = A$.

<u>Es</u> $${}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

5) $\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

6) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

(attenzione all'ordine!)

<u>Dim</u> $$\left({}^t(AB)\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = ({}^tB\,{}^tA)_{ij}$$