Partiamo da una teoria di gauge con Lagrangiana gauge inv.

$$\mathcal{L}_{g.i} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, D\psi)$$

↑ fermioni in rap. R del gruppo di gauge

Il P.I. è dato da

$$\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i} + \underbrace{\mathcal{L}_{g.f} + \mathcal{L}_{gh}}$$

la loro forma dipende dalla scelta della funz. $G(A)$.

La Lagrangiana $\mathcal{L}$ è RINORMALIZZABILE nel senso che tutti i termini hanno MASS-DIM ≤ 4.

Per provare che la teoria è rinormalizzabile (nel senso che cancelliamo tutti infiniti), abbiamo bisogno di mostrare che c'è un controtermine, generato dalla ridef. dei parametri in $\mathcal{L}$, per ogni divergenza.

BRST Symmetry

Becchi, Rouet, Stora; Tyutin

$$\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{i\int\mathcal{L}} \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{g.f} + \mathcal{L}_{gh}$$

La Lagrangiana $\mathcal{L}$ ha una simmetria globale.

Per convenienza possiamo riscrivere

$$e^{\frac{i}{2\xi}\int(\partial_\mu A^\mu)^2} = \int \mathcal{D}B\; e^{i\int \underbrace{\left(\frac{\xi}{2}B^2 - B^a\,\partial_\mu A^{a\mu}\right)}_{\otimes}}$$

$\otimes$: $\frac{\xi}{2}\left(B^2 - \frac{2}{\xi} B \partial_\mu A^\mu\right) = \frac{\xi}{2}\left(B - \frac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu\right)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$

Il campo B è un campo AUSILIARIO (non propagante) scalare nella rap. Adj. [Moltiplicatore di Lagrange]

$-B^a G^a(A)$ $\quad$ $\bar{c}^a \Omega_{FP}^{ab} c^b$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi + \frac{\xi}{2}(B^a)^2 - B^a\partial^\mu A^a_\mu + \bar{c}^a(-\partial^\mu D_\mu)^{ab} c^b$$

è invariante sotto la sim. (continua) di BRST:

$$\delta A^a_\mu = \epsilon (D_\mu c)^a = \epsilon(\partial_\mu c^a - g f^{abc} A^b_\mu c^c)$$

$$\delta\psi = -ig\epsilon c^a t^a_R \psi$$

formalmente uguali a TRASF. di GAUGE con parametro $g\epsilon c(x)$

$$\delta c^a = \frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c$$

Trasf. GLOBALE, ma non è LINEARE (cioè del tipo $\delta\varphi = \beta\cdot\varphi$)

$$\delta \bar{c}^a = -\epsilon B^a$$

$$\delta B^a = 0$$

questo permetterebbe di rimpiazzare $\frac{\xi}{2}(B)^2$ con generici funzionali $F[B]$, mantenendo BRST-inv.
(in ogni caso, per diagrammatica e rinorm., evita tenere term. quadr.)

ϵ è un parametro (cost.) continuo ; ϵ è un numero di GRASSMANN

Dimostriamo l'invarianza di $\mathcal{L}$ sotto BRST:

$-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \mathcal{L}_\Pi$ è gauge inv. $\Longrightarrow$ inv. sotto BRST

$\frac{\xi}{2}(B^a)^2$ è manifestam. BRST-inv.

Consideriamo quindi

$$\delta\left(-B^a\partial^\mu A^a_\mu + \bar{c}^a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c^b\right) =$$

$$= -\epsilon\, \cancel{B^a \partial^\mu (D_\mu c)^a} - \underbrace{\delta \bar{c}^a}_{-\epsilon B^a} \cancel{\partial^\mu D_\mu c^a} - \bar{c}^a \partial^\mu \delta (D_\mu c)^a$$

$\delta A^a_\mu = \epsilon (D_\mu c)^a$

$\delta \psi = -ig\epsilon c^a t^a_R \psi$

$\delta c^a = \frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c$

$\delta \bar{c}^a = -\epsilon B^a$

$\delta B^a = 0$

$\downarrow$

Calcoliamo

$$\delta (D_\mu c)^a = \delta \left(\partial_\mu c^a - g f^{abc} A^b_\mu c^c \right) =$$

$$= \partial_\mu \delta c^a - g f^{abc} \epsilon (\partial_\mu c^b - g f^{bkm} A^k_\mu c^m) c^c - g f^{abc} A^b_\mu \delta c^c$$

$$= \underbrace{\left(\partial_\mu \delta c^a - \underbrace{g f^{abc} \epsilon \partial_\mu c^b c^c}_{= \frac{1}{2} g f^{abc} \epsilon \partial_\mu (c^b c^c)} \right)}_{= \partial_\mu \left(\delta c^a - \frac{\epsilon}{2} g f^{abc} c^b c^c \right) = 0} - g f^{abc} \left(A^b_\mu \underbrace{\delta c^c}_{\frac{1}{2} g \epsilon f^{cde} c^d c^e} - g f^{bkm} A^k_\mu c^m c^c \right)$$

$$= -g f^{abc} \epsilon \left(A^b_\mu \frac{1}{2} g f^{cde} c^d c^e - g f^{bkm} A^k_\mu c^m c^c \right)$$

$$= -\frac{1}{2} g^2 \epsilon A^b_\mu c^p c^q \underbrace{\left(f^{abc} f^{cpq} - f^{alq} f^{lbp} + f^{alp} f^{lbq} \right)}_{-f^{abc} f^{pcq} - f^{aqc} f^{bcp} - f^{apc} f^{qcb} = 0 \text{ per Id. Jacobi}}$$

Id Jacobi : $[t^m, [t^s, t^k]] + [t^s, [t^k, t^m]] + [t^k, [t^m, t^s]] = 0$

$= i [t^m, f^{skh} t^h]$ + perm. cicl. (msk)

$$= \Big[\underbrace{-f^{mha} f^{skh} + \text{''}}_{= 0 \ \forall a} \Big] t^a$$

$f^{amh} f^{khs}$ + perm. cicliche $= 0$

$\Rightarrow \delta (D_\mu c)^a = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ è inv. sotto BRST //

BRST simm. $\longrightarrow$ ci sarà una carica conservata Q_{BRST}

t.c. $\quad \delta\varphi = \epsilon \overbrace{Q_{BRST}}^{*} \cdot \varphi$

generatore

Siccome ϵ è n° Grassmann allora $Q_{BRST}\cdot\varphi$ ha statistica opposta a φ

*: mappa tra campi $Q_{BRST}: \{fields\} \to \{fields\}$

La trasf. di BRST è NILPOTENTE : ("applicata due volte fa zero")

$$\delta_1\delta_2 A_\mu^a = \delta_1\left(\epsilon_2 (D_\mu c)^a\right) = \epsilon_2\, \delta_1 (D_\mu c)^a = 0$$

$\delta A_\mu^a = \epsilon (D_\mu c)^a$

$\delta\psi = -ig\epsilon\, c^a t_R^a \psi$

$\delta c^a = \frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c$

$\delta \bar{c}^a = -\epsilon B^a$

$\delta B^a = 0$

$$\delta_1\delta_2\psi = ig\epsilon_2\, \delta_1 (c^a t_R^a \psi) =$$

$$= ig\epsilon_2\Big(\frac{1}{2} g\epsilon_1 f^{abc} c^b c^c t_R^a \psi +$$

$$+ ig\, \epsilon_1 c^a t_R^a \cancel{\epsilon_1}\, c^d t_R^d \psi\Big) = 0$$

$$\frac{i}{2} g\epsilon_1\, c^a c^d [t_R^a, t_R^d] = -\frac{1}{2} g\epsilon_1 f^{adq} c^a c^d t_R^q$$

$$\delta_1\delta_2 c^a = \frac{1}{2} g\epsilon_2 f^{abc}\, \delta_1 (c^b c^c) = \frac{1}{4} g^2 \epsilon_2\epsilon_1 f^{abc}\left(f^{bpq} c^p c^q c^c - f^{cpq} c^b c^p c^q\right) = 0$$

ϵ_1 passa un c antisym. in bc

$$\delta_1\delta_2 \bar{c}^a = -\epsilon_2\, \delta_1 B^a = 0$$

$$\frac{1}{2} g^2 \epsilon_2\epsilon_1 f^{abc} f^{bpq} \underbrace{c^p c^q}_{\text{antisim. in } p, q} c^c =$$

$$\delta_1\delta_2 B^a = 0$$

$$= \frac{1}{6} g^2 \epsilon_2\epsilon_1\, c^p c^q c^c \left(f^{abc} f^{bpq} + f^{abp} f^{bqc} + f^{abq} f^{bcp}\right)$$

$= 0$ per ID. di JACOBI

Consideriamo due campi ϕ_1, ϕ_2 (non necessariam. allo stesso pto)

$Q_{BRST} \equiv Q_B$

$$\delta(\phi_1\phi_2) = \delta\phi_1\, \phi_2 + \phi_1\, \delta\phi_2 = (\epsilon Q_B \cdot \phi_1)\phi_2 + \phi_1 (\epsilon Q_B \cdot \phi_2)$$

Grassmann

$$= \epsilon\left[(Q_B\cdot\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1 (Q_B\cdot\phi_2)\right]$$

$+$ se ϕ_1 è bos.

$-$ " ϕ_1 è ferm. (o gh)

$$\delta\left(Q_B\phi_1\,\phi_2 \pm \phi_1\,Q_B\phi_2\right) = \epsilon'\underbrace{\cancel{Q_B^2}}_{=0}\phi_1\,\phi_2 + Q_B\phi_1\,\epsilon' Q_B\phi_2$$

$$\pm\left(\epsilon' Q_B\phi_1\,Q_B\phi_2 + \phi_1\,\epsilon'\underbrace{\cancel{Q_B^2}}_{=0}\phi_2\right)$$

$$= \epsilon'\left[\mp Q_B\phi_1\,Q_B\phi_2 \pm Q_B\phi_1\,Q_B\phi_2\right] = 0$$

$\Rightarrow$ BRST è NILPOTENTE quando agisce su ogni prodotto di campi valutati a pti arbitrari.

Siccome ogni funzionale $F[\phi]$ può essere scritto come somma di integrali multipli di tali prodotti

$$\Rightarrow \delta^2_{BRST} F[\phi] = 0 \implies \text{BRST è NILPOTENTE}$$

La trasf. di BRST data rende inv. qualsiasi lagrangiana ottenuta col procedim. di FP, cioè $\forall$ scelta di $G(A)$:

$$-B^a\partial^\mu A^a_\mu + \bar{c}^a(-\partial^\mu D_\mu)^{ab}c^b \qquad + \mathcal{L}_{g.i.}$$

$$-B^a G^a(A) - \underbrace{\bar{c}^a \frac{\delta G^a}{\delta\alpha^b}(A^\alpha)\, c^b}_{} \qquad + \mathcal{L}_{g.i.} \leftarrow \text{inv. sotto BRST}$$

$$= \bar{c}^a \frac{\delta G^a}{\delta\epsilon c^b}(A'^{\,\text{BRST}})\, c^b = \bar{c}^a \frac{\delta G^a}{\delta A^c_\mu}\underbrace{\frac{\delta A'^c}{\delta\epsilon c^b}}_{D_\mu c^c} c^b$$

δ_{BRST}

$$-B^a\frac{\delta G^a}{\cancel{\delta A^b_\mu}}\epsilon D_\mu c^b + \epsilon B^a\frac{\cancel{\delta G^a}}{\delta A^c_\mu}D_\mu c^c - \bar{c}^a\frac{\delta G^a}{\delta A^c_\mu}\underbrace{\delta(D_\mu c)^c}_{=0}$$

Il fatto che $Q_{BRST}^2 = 0$ permette di rendere manifesta l'invarianza di $\mathcal{L}$ rispetto a BRST:

- $\delta \mathcal{L}_{g.i.} = 0$
- $\frac{\xi}{2}(B^a)^2 - B^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a(-\partial^\mu D_\mu^{ab})c^b =$

$$= Q_{BRST} \cdot \Big[\underbrace{\bar{c}^a \partial^\mu A_\mu^a - \frac{\xi}{2}\bar{c}^a B^a}_{=\Psi \text{ (funzionale dei campi)}} \Big]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i.} + Q_{BRST} \cdot \Psi \qquad (*)$$

Siccome $Q_{BRST}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{BRST} \cdot \mathcal{L} = 0$

Arrivati a qta forma di $\mathcal{L}$ (*) con procedim. di FP. Qta forma è una forma più generale (quantizzaz. BRST): uno richiede che $\mathcal{L}$ produce correlatori che sarebbero prodotti integrando sulle classi di equiv. BRST dicono che una tale $\mathcal{L}$ avrà qta forma, $\forall \Psi$

Deriviamo la CARICA (conservata) di BRST.

Rimaniamo nella gauge $G^a(A) = \partial_\mu A^{a\mu}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \mathcal{L}_M + \frac{\xi}{2}(B^a)^2 - B^a \partial_\mu A^{a\mu} + \partial^\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a$$

ignoriamo il termine di materia per il momento

Calcoliamo i momenti coniugati

$A_i^a \rightarrow F_{i0}^a$

$A_0^a \rightarrow B^a$ ← ora A_0 ha mom. coniugato

$c^a \rightarrow \partial_0 \bar{c}$

$\bar{c}^a \rightarrow D_0 c$

Teorema di Nöther:

$$Q \simeq \sum_\alpha P_\alpha \, \delta q^\alpha$$

(δq^α: trasf. di simm.)

$$\Rightarrow \quad J_\mu^B = -F_{\mu\nu}^a (D^\nu c)^a - B^a (D_\mu c)^a + \frac{1}{2} f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a c^b c^c$$

$$Q_{BRST} = \int d^3x \left[F_{0i}^a (D_i c)^a - B^a (D_0 c)^a + \frac{1}{2} f^{abc} \partial_0 \bar{c}^a c^b c^c \right] \quad (*)$$

Q_{BRST} ha ghost number $= +1$

$gh\#(Q_B \cdot \varphi) = gh\#(\varphi) + 1$

$\rightsquigarrow$ Quantizzaz. canonica: otteniamo le regole di comm. trovate quando discusso quant. can. in $A_0 = 0$, e in più

$$[A_0^a(\bar{x},t), B^b(\bar{y},t)] = i\delta^{ab}\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\{c^a(\bar{x},t), \partial_0 \bar{c}^b(\bar{y},t)\} = i\delta^{ab}\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\{\bar{c}^a(\bar{x},t), (D_0 c)^b(\bar{y},t)\} = i\delta^{ab}\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

Usando le regole di comm. canoniche, si vede che Q_{BRST} in $(*)$ genera le trasf. di BRST, cioè

$$\delta_{BRST}\varphi = i[Q_{BRST}, \varphi]_{\pm}$$

commutatore

anticommutatore

- Espandiamo i campi sugli op. di creaz. e distruz.
- Gli stati sono dati da $a_q^\dagger |0\rangle$; in particolare $a_{c^a}^\dagger |0\rangle$ crea una particella di ghost.

$\hookrightarrow$ spazio di Fock

- Lo spazio di Fock contiene sia stati FISICI che stati non-FISICI (xes. ghost, comp. longitudinali di A, ...)
  ↳ ci vuole metodo per distinguere stati FISICI dagli altri.

- Per selezionare gli stati fisici richiediamo che gli elementi di matrice tra STATI FISICI non dipendano dalle condiz. di gauge fixing $G(A)$, e quindi che non dipendano dal funzionale Ψ in $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.f.} + Q_B \cdot \Psi$.

- La variazione di un elemento di matrice $\langle \alpha | \beta \rangle$ dovuta alla variaz. $\tilde{\delta} \Psi$

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \int_{\alpha, \beta} \mathcal{D}\varphi \, e^{iS}$$

$$\langle \alpha | \beta \rangle' = \int_{\alpha, \beta} \mathcal{D}\varphi \, e^{iS + i\tilde{\delta} S}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta} \langle \alpha | \beta \rangle &= i \langle \alpha | \tilde{\delta} S | \beta \rangle \\
&\simeq i \langle \alpha | Q_B \cdot \tilde{\delta} \Psi | \beta \rangle \\
&\simeq \langle \alpha | [Q_B, \tilde{\delta} \Psi] | \beta \rangle
\end{aligned}$$

α, β sono FISICI se $\langle \alpha | [Q_B, \tilde{\delta} \Psi] | \beta \rangle = 0 \quad \forall \tilde{\delta} \Psi$

$\Rightarrow$ Gli STATI FISICI stanno nel NUCLEO dell'operatore di BRST, cioè $Q_B | phys \rangle = 0$

Inoltre due stati fisici che differiscono per un vett. della forma $Q_B | \chi \rangle$ danno gli stessi elementi di matrice con ogni stato fisico

$$\langle \alpha | \big(| \beta \rangle + Q_B | \chi \rangle \big) = \langle \alpha | \beta \rangle + \underbrace{\langle \alpha | Q_B | \chi \rangle}_{0} = \langle \alpha | \beta \rangle.$$

$\Rightarrow$ $| phys \rangle$ e $| phys \rangle + Q_B | \chi \rangle$ sono equival. $\forall | \chi \rangle$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}_{phys} = \frac{\mathrm{Ker}\, Q_B}{\mathrm{Im}\, Q_B} \longleftrightarrow \text{COHOMOLOGY of } Q_{BRST}$$

- I vettori $|\xi\rangle$ t.c. $Q_B|\xi\rangle = 0$ sono detti CHIUSI
- I vettori $|\sigma\rangle$ t.c. $|\sigma\rangle = Q_B|\chi\rangle$ sono detti ESATTI