Lezione 9

$\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \; \forall B, C \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$

$A(B+C) = AB + AC$ <u>proprietà distributiva a sinistra</u>

<u>Dim</u> $A = (a_{ij}), \; B = (b_{ij}), \; C = (c_{ij})$

$B + C = (b_{ij} + c_{ij})$

$$(A(B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} =$$

$$= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \quad \forall i,j \Rightarrow A(B+C) = AB + AC.$$

Vale anche la <u>proprietà distributiva a destra</u> che si dimostra in modo simile

$\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \; \forall C \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$ si ha

$$(A+B)C = AC + BC$$

Matrice per vettore colonna

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \Rightarrow AU \in M_{m,1}(\mathbb{K})$

vettore colonna (U) — vettore colonna (AU)

<u>Es</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 5z \\ 3x - y + 4z \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari

Un'equazione lineare nell'incognita x è

$$ax = b \quad (*)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a \neq 0$ allora $(*)$ ha l'unica soluzione $x = \frac{b}{a}$. Se $a = 0$ allora $(*)$ ha $\forall x \in \mathbb{R}$ come soluzione se $b = 0$, mentre non ha nessuna soluzione se $a = 0, b \neq 0$.

Più in generale consideriamo equazioni con più incognite e su un campo $\mathbb{K}$.

Un'equazione lineare è del tipo

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

dove $a_1, \dots, a_n$ sono detti coefficienti e sono elementi di un campo $\mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}$ è il termine noto, $x_1, \dots, x_n$ sono le incognite, $n \geq 1$.

Un sistema lineare è formato da un numero finito di equazioni lineari nelle incognite $x_1, \dots, x_n$

$$S: \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \quad - - - - - \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

dove gli $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sono i coefficienti, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{K}$ sono i termini noti e $x_1, \dots, x_n$ sono simboli formali che rappresentano le incognite.

S è un sistema lineare di m equazioni in n incognite.

Forma matriciale Dato il sistema S si considera la <u>matrice del sistema</u>

$$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

le cui entrate sono i coefficienti a_{ij}, e il <u>vettore dei termini noti</u>

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

Poniamo anche

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{(vettore delle incognite)}$$

Si osservi che B e X sono <u>vettori colonna</u>.

Si ha: $$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

che sono esattamente i primi membri delle equazioni di S.
Pertanto S può essere scritto nella <u>forma matriciale</u>:

$$S: \quad AX = B \qquad \text{(sistema lineare)}$$

Soluzioni Una soluzione di S è un vettore $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$
t.c. $\qquad AU = B \qquad$ (valentità)

Se S ammette almeno una soluzione è detto <u>compatibile</u>.
Se S non ammette soluzioni è detto <u>incompatibile</u>.

Es $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ è compatibile perché $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ In forma matriciale

$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ è incompatibile, non ha soluzioni.

Dato un sistema $S: AX = B$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ denoteremo con Σ_S l'insieme delle soluzioni di S:

$$\Sigma_S = \{ U \in \mathbb{K}^n \mid AU = B \} \subset \mathbb{K}^n.$$

Allora S è compatibile $\iff \Sigma_S \neq \emptyset$.

Se S è compatibile Σ_S è detto anche <u>spazio delle soluzioni di S</u>. Si noti che vale l'inclusione

$$\Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$$

dove n è il numero delle incognite.
Mentre il termine noto $B \in \mathbb{K}^m$, dove m è il numero delle equazioni di S.

<u>Sistemi equivalenti</u> Due sistemi lineari nelle stesse incognite

$$S: AX = B \quad e \quad S': A'X = B'$$

con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, $A' \in M_{l,n}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathbb{K}^l$

sono detti <u>equivalenti</u> se $\Sigma_S = \Sigma_{S'}$, cioè se hanno le stesse soluzioni, oppure sono entrambi incompatibili.

Risolvere un sistema lineare significa trovarne tutte le soluzioni, oppure capire se è incompatibile.

La strategia che adotteremo sarà di trasformare un dato sistema lineare $S: AX = B$ in un'altro sistema lineare equivalente ma più semplice.
E' utile considerare la matrice completa $(A \mid B)$ ottenuta dalla matrice del sistema A aggiungendo B come ultima colonna.

Matrici e sistemi a gradini

Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si chiama pivot la prima entrata non nulla di ciascuna riga (contando da sinistra verso destra).

Es Pivot di $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (questa non è a gradini)

Una matrice A è detta a gradini se il pivot di ciascuna riga $A^{(i)}$ è più a destra del pivot della riga precedente $A^{(i-1)}$, $\forall i = 2, \dots, m$.

Un sistema $S: AX = B$ è detto a gradini se la matrice del sistema A è a gradini.

Es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è a gradini

$A^{(i-1)}: 0 \dots 0 \; * \dots$

$A^{(i)}: 0 \dots 0 \; 0 \dots 0 \; * \dots$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è a gradini