Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

3. Sistemi di equazioni lineari

Siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia K un campo.

Definizione 1. *a) Un* **sistema di** m **equazioni lineari** *a coefficienti in* K *in* n *incognite è un sistema di equazioni della seguente forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m\,, \end{cases}$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn} \in K$ *sono i* **coefficienti***,* $x_1, \ldots, x_n$ *sono le* **incognite***,* n *è l'***ordine***,* $b_1, \ldots, b_m \in K$ *sono i* **termini noti** *del sistema lineare.*

b) Una **soluzione** *del sistema lineare è una* n*-upla ordinata (vettore colonna)* $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$ *tale che, se si sostituisce ad* x_i *il valore* $s_i \in K$*, per ogni* $i = 1, \ldots, n$*, le* m *equazioni sono simultaneamente soddisfatte.*

c) Il sistema lineare si dice **omogeneo** *(rispettivamente* **non omogeneo***), se* $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ *(rispettivamente se* $b_j \neq 0$*, per qualche* $j = 1, \ldots, m$*).*

d) Il sistema lineare si dice **compatibile** *(rispettivamente* **incompatibile***), se possiede una soluzione (rispettivamente, se non ha alcuna soluzione).*

Osservazione 1. Ogni sistema lineare omogeneo è compatibile, infatti il vettore nullo $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$ è una sua soluzione, detta **soluzione banale**. Ogni altra soluzione si dice **soluzione non banale**.

Esempio 1. 1. Il sistema lineare di ordine 2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 2 \end{cases}$$

è incompatibile (per ogni $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \in K^2$, non si possono verificare simultaneamente le equazioni $s_1 + 3s_2 = 1$, $s_1 + 3s_2 = 2$).

2. Il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = 1 \\ x_1 + x_2 & = 0 \end{cases}$$
è compatibile ed ammette l'unica soluzione $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in K^2$. Infatti, dalla seconda equazione ricaviamo $x_1 = -x_2$. Sostituendo $-x_2$ al posto di x_1 nella prima equazione, deduciamo che $x_2 = \frac{1}{2}$, quindi $x_1 = -\frac{1}{2}$.

3. Il sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 & = 6 \end{cases}$$
è compatibile. Esso ammette infinite soluzioni date da $\begin{pmatrix} t+3 \\ t \end{pmatrix} \in K^2$, per ogni $t \in K$. Infatti, la seconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicando ambo i membri per 2. Quindi è sufficiente trovare le soluzioni della prima equazione, che possiamo riscrivere come $x_1 = 3 + x_2$. Per ogni $t \in K$, sostituendo ad x_2 il valore di t, vediamo che $x_1 = 3 + t$.

Definizione 2. *La* **matrice dei coefficienti** *del sistema lineare*
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \,, \end{cases}$$
è la matrice $m \times n$ a coefficienti in K, A, il cui elemento di posto ij è il coefficiente a_{ij} del sistema lineare, per ogni $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, cioè
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)\,.$$
Il **vettore dei termini noti** *è il vettore colonna*
$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m\,.$$

Osserviamo che, se mettiamo le incognite in colonna, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, allora il precedente sistema lineare si può scrivere come segue:
$$A \cdot x = b\,,$$

dove A è la matrice dei coefficienti, b il vettore dei termini noti, ed il prodotto è il prodotto righe per colonne.

La **matrice completa** associata al precedente sistema lineare è la matrice

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M_{m,n+1}(K)\,.$$

Esempio 2. Consideriamo il seguente sistema lineare di ordine 4:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = -1 \\ \sqrt{2}x_2 + 3x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = \pi\,. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti associata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})\,.$$

Il vettore dei termini noti è $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$. La matrice completa del sistema è

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \pi \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})\,.$$

L'espressione $A \cdot x$ è data da

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ \sqrt{2}x_2 + 3x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'equazione $A \cdot x = b$ è equivalente al sistema lineare dato.

Teorema 1 (di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari)**.** *1) Sia $A \cdot x = 0$ un sistema lineare omogeneo di ordine n a coefficienti in K. Per ogni coppia di soluzioni $s, s' \in K^n$ di $A \cdot x = 0$ e per ogni scalare $a \in K$, $s + s', as \in K^n$ sono soluzioni di $A \cdot x = 0$. In particolare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A \cdot x = 0$ è un sottospazio vettoriale di K^n (per la definizione di sottospazio vettoriale si veda il prossimo capitolo).*

2) Sia $A \cdot x = b$ un sistema lineare di ordine n. Sia $\tilde{s} \in K^n$ una sua soluzione. Allora $s \in K^n$ è soluzione del sistema lineare, se e solo se

$$s = \tilde{s} + s'\,,$$

dove $s' \in K^n$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot x = 0$.

Dim. 1) Siccome $s, s' \in K^n$ sono soluzioni del sistema lineare omogeneo in considerazione, si ha che $A \cdot s = 0$ ed $A \cdot s' = 0$. Dobbiamo provare che $A \cdot (s + s') = 0$ e che $A \cdot (as) = 0$.

Per la proprietà distributiva del prodotto righe per colonne sulla somma di matrici (in questo caso s, s' sono vettori colonna, quindi si possono considerare come matrici $n \times 1$), si ha che $A \cdot (s + s') = A \cdot s + A \cdot s' = 0 + 0 = 0$. Segue che $s + s' \in K^n$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo.

Per dimostrare che $A \cdot (as) = 0$, basta osservare che il prodotto per scalari commuta con il prodotto tra matrici, quindi $A \cdot (as) = aA \cdot s = a0 = 0$.

2) Sia $s \in K^n$ una soluzione arbitraria del sistema lineare $A \cdot x = b$. Osserviamo che $s = \tilde{s} + (s - \tilde{s})$, quindi basta verificare che $s - \tilde{s}$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot x = 0$. Sfruttando la proprietà distributiva del prodotto righe per colonne tra matrici, $A \cdot (s - \tilde{s}) = A \cdot s + A \cdot (-\tilde{s}) = A \cdot s - A \cdot \tilde{s} = b - b = 0$, dove nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che $-\tilde{s} = (-1)\tilde{s}$ e la commutatività del prodotto righe per colonne con il prodotto per scalari. Viceversa, per ogni soluzione $s' \in K^n$ del sistema lineare omogeneo associato, $\tilde{s} + s'$ è una soluzione del sistema lineare, poiché $A \cdot (\tilde{s} + s') = A \cdot \tilde{s} + A \cdot s' = b + 0 = b$. □

1 Sistemi lineari con matrici dei coefficienti a scala

Sia $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$. Per ogni $i = 1, \ldots, m$ tale che $A_{(i)}$ non è la riga nulla, sia

$$d_i := \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}\,.$$

Definizione 3. *Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ è detta a* **scala** *se vale una delle seguenti condizioni:*

- *A è la matrice nulla, oppure*
- *posto r il numero delle righe non nulle di A, si ha che $A_{(i)} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$ e $d_1 < d_2 < \ldots < d_r$.*

Se A è a scala, gli elementi $a_{1d_1}, \ldots, a_{rd_r}$ si dicono i **pivot** *di A.*

Esempio 3. 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,7}(\mathbb{R})\,.$$

Osserviamo che $r = 3$, infatti

$$A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

mentre $A_{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Determiniamo gli indici d_i, $i = 1, 2, 3$. Dalla definizione segue che: $d_1 = \min\{2, 4, 5, 7\} = 2$, $d_2 = \min\{3, 4, 5, 6\} = 3$, $d_3 = \min\{6, 7\} = 6$. Quindi $d_1 = 2 < d_2 = 3 < d_3 = 6$ ed A è a scala. I pivot di A sono $a_{12} = 2, a_{23} = 1, a_{36} = 3$.

2. Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})\,.$$

Osserviamo che $r = 4$ e che $A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}, A_{(4)} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Inoltre si ha: $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 2, d_4 = 3$. Quindi A non è a scala perché $d_2 \not< d_3$.

3. Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})\,.$$

In questo caso si ha che $r = 2$, ma $A_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi A non è a scala. Osserviamo che A è diagonale.

Proposizione 1. *Sia $A \cdot x = b$ un sistema lineare di ordine n, formato da m equazioni, a coefficienti in K. Supponiamo che $A \in M_{m,n}(K)$ sia una matrice a scala, e sia $r \in \{0, \dots, m\}$ come nella definizione 3.*
Allora, il sistema lineare $A \cdot x = b$ è compatibile $\iff b_{r+1} = b_{r+2} = \ldots = b_m = 0$.

Dim. ($\Rightarrow$) Per ipotesi il sistema lineare $A \cdot x = b$ è compatibile, quindi ha una soluzione $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$, $A \cdot s = b$. Per ogni $i = 1, \dots, m$, la componente i-ma del vettore $A \cdot s \in K^n$ è data dal prodotto (righe per colonne) della i-ma riga di A per s, cioè $A_{(i)} \cdot s$. Sia ora $i > r$, per definizione di r abbiamo che $A_{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$, quindi $A_{(i)} \cdot s = 0$, perciò $b_i = 0$.

($\Leftarrow$) Viceversa supponiamo che $b_i = 0$ per ogni $i > r$ e dimostriamo che è sempre possibile trovare una soluzione del sistema lineare $A \cdot x = b$. A tale scopo, procediamo risolvendo tutte le equazioni partendo dall'ultima equazione ed andando a ritroso. Precisamente, le equazioni dalla $(r+1)$-ma alla m-ma sono tutte del tipo

$$0 = 0\,,$$

quindi sono soddisfatte per ogni scelta di $s_1, \dots, s_n \in K$ ponendo $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$. L'equazione r-ma è della forma seguente:

$$a_{r,d_r} x_{d_r} + a_{r,d_r+1} x_{d_r+1} + \ldots + a_{r,n} x_n = b_r\,.$$

Siccome $a_{r,d_r} \neq 0$ (essendo a_{r,d_r} l'r-mo pivot di A), possiamo ricavare x_{d_r} in funzione di $x_{d_r+1}, x_{d_r+2}, \dots, x_n$, ed otteniamo:

$$x_{d_r} = \frac{1}{a_{r,d_r}} \left(b_r - a_{r,d_r+1} x_{d_r+1} - a_{r,d_r+2} x_{d_r+2} - \ldots - a_{r,n} x_n \right) .$$

Quindi, per ogni $s_1, \dots, s_{d_r-1} \in K$ e per ogni $s_{d_r+1}, \dots, s_n \in K$, otteniamo una soluzione della equazione r-ma del sistema lineare ponendo $x_1 = s_1, \dots, x_{d_r-1} = s_{d_r-1}, x_{d_r+1} = s_{d_r+1}, \dots, x_n = s_n \in K$, ed

$$x_{d_r} = \frac{1}{a_{r,d_r}} \left(b_r - a_{r,d_r+1} s_{d_r+1} - a_{r,d_r+2} s_{d_r+2} - \ldots - a_{r,n} s_n \right) .$$

Ora consideriamo l'equazione $(r-1)$-ma. Essa è della forma seguente:

$$a_{r-1,d_{r-1}} x_{d_{r-1}} + a_{r-1,d_{r-1}+1} x_{d_{r-1}+1} + \ldots + a_{r-1,n} x_n = b_{r-1} .$$

Dividendo ambo i membri per $a_{r-1,d_{r-1}}$ (che è $\neq 0$), ricaviamo $x_{d_{r-1}}$ in funzione di $x_{d_{r-1}+1}, \dots, x_n$. Quindi, sostituendo ad x_{d_r} il valore determinanto in precedenza, vediamo che è possibile trovare degli scalari $s_1, \dots, s_n \in K$ tale che $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$ sia simultaneamente soluzione delle equazioni dalla $(r-1)$-ma alla m-ma del sistema lineare. Procedendo in questo modo vediamo che il sistema lineare $A \cdot x = b$ ha (almeno) una soluzione e quindi è compatibile. $\square$

Esempio 4. 1. Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ -x_3 + 2x_5 & = 1 \\ x_4 - x_5 & = 3 \,, \end{cases}$$

a coefficienti in $K = \mathbb{R}$. La matrice dei coefficienti è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Osserviamo che A è a scala con $r = 3$, $d_1 = 2 < d_2 = 3 < d_3 = 4$, quindi per la proposizione precedente il sistema lineare è compatibile.

Per trovare le sue soluzioni procediamo come descritto nella dimostrazione della proposizione. Dall'ultima equazione ricaviamo

$$x_4 = 3 + x_5 .$$

Analogamente la seconda equazione implica che

$$x_3 = -1 + 2x_5 .$$

Infine dalla prima equazione abbiamo che

$$x_2 = \frac{1}{2}(-x_3 + x_4)\,.$$

Sostituendo le precedenti espressioni di x_3 ed x_4 in funzione di x_5 in quest'ultima equazione otteniamo:

$$x_2 = \frac{1}{2}(1 - 2x_5 + 3 + x_5) = \frac{1}{2}(4 - x_5) = 2 - \frac{1}{2}x_5\,.$$

Quindi le soluzioni del sistema lineare sono tutti i vettori $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$, tale che $s_1, s_5 \in \mathbb{R}$ sono arbitrari, $s_2 = 2 - \frac{1}{2}s_5$, $s_3 = -1 + 2s_5$, $s_4 = 3 + s_5$. In breve, scriviamo l'insieme delle soluzioni del sistema lineare come segue:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ 2 - \frac{1}{2}s_5 \\ -1 + 2s_5 \\ 3 + s_5 \\ s_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid s_1, s_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Osserviamo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione particolare del sistema lineare $A \cdot x = b$, e che le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot x = 0$ sono tutte della forma $\begin{pmatrix} s_1 \\ -\frac{1}{2}s_5 \\ 2s_5 \\ s_5 \\ s_5 \end{pmatrix}$, $\forall\, s_1, s_5 \in \mathbb{R}$. Quindi ogni soluzione del sistema lineare è la somma di una soluzione particolare con una soluzione del sistema lineare omogeneo associato, in accordo con il teorema di struttura per le soluzioni dei sistemi linearei.

2. Consideriamo il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 + 6x_4 & = 5 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \\ 3x_5 & = 1\,. \end{cases}$$

Per la matrice dei coefficienti abbiamo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

La matrice A è a scala, con $r = 3$, $d_1 = 1 < d_2 = 2 < d_3 = 5$. Per la proposizione il sistema lineare è compatibile. Per trovare le soluzioni procediamo come sopra. Dalla terza equazione abbiamo $x_5 = \frac{1}{3}$. Dalla seconda ricaviamo $x_2 = -3x_3 - 2x_4 - x_5$; sostituendo il valore di $\frac{1}{3}$ ad x_5, essa diventa $x_2 = -\frac{1}{3} - 3x_3 - 2x_4$. Dalla prima equazione otteniamo: $x_1 = \frac{1}{2}(5 - 4x_3 - 6x_4)$. Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(5 - 4s_3 - 6s_4) \\ -\frac{1}{3} - 3s_3 - 2s_4 \\ s_3 \\ s_4 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mid s_3, s_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2 Il metodo di Gauß

Definizione 4. *Due sistemi lineari dello stesso ordine sono* **equivalenti** *se hanno le stesse soluzioni.*

Il metodo di Gauß, per stabilire la compatibilità ed eventualmente per trovare le soluzioni di un sistema lineare $A \cdot x = b$, consiste nel trasformare tale sistema in uno ad esso equivalente, $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$, con matrice dei coefficienti $\tilde{A}$ a scala. Quindi si stabilisce la compatibilità di $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$, ed eventualmente se ne trovano le soluzioni, tramite la Proposizione 1. Per trasformare $A \cdot x = b$ in $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ si effettuano in modo opportuno le così dette **operazioni elementari**.

Operazione elementare 1 (OE1). Questa operazione consiste nello scambio di due equazioni tra di loro.

Nella pratica, per risolvere un dato sistema lineare, sarà spesso più comodo effettuare le operazioni elementari direttamente sulla matrice completa $(A|b)$. In tal caso la OE1 consiste nello scambio di due righe di $(A|b)$ tra di loro.

Operazione elementare 2 (OE2). Questa operazione consiste nella moltiplicazione di ambo i membri di una equazione per uno stesso scalare non nullo. La corrispondente operazione sulla matrice completa $(A|b)$ consiste nella moltiplicazione di una sua riga per uno scalare non nullo.

Operazione elementare 3 (OE3). Con questa operazione si sostituisce una equazione con l'equazione che si ottiene sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione. La corrispondente operazione sulla matrice completa $(A|b)$ consiste nel sostituire una sua riga, ad esempio $(A|b)_{(i)}$, con la somma $(A|b)_{(i)} + c(A|b)_{(j)}$, per qualche $j \neq i$ e $c \in K$.

Proposizione 2. *Le operazioni elementari 1, 2 e 3 trasformano un dato sistema lineare in uno ad esso equivalente.*

Dim. Sia $A \cdot x = b$ un dato sistema lineare di ordine n, con m equazioni, a coefficienti in K. Chiaramente scambiando l'ordine delle sue equazioni, si ottiene un sistema lineare equivalente ad esso. Lo stesso vale se si moltiplica ambo i membri di una equazione per uno scalare $\neq 0$.

Consideriamo quindi l'OE3, e precisamente sostituiamo l'equazione i-ma di $A \cdot x = b$ con l'equazione che si ottiene sommando ad essa c-volte l'equazione j-ma, per qualche $c \in K$ e per qualche $j \neq i$. Denotiamo con $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ il sistema lineare che si ottiene in questo modo. Ricordiamo che, per ogni $k = 1, \dots, m$, la k-ma equazione di $A \cdot x = b$ si può scrivere come segue: $A_{(k)} \cdot x = b_k$, dove $A_{(k)}$ è la k-ma riga di A, b_k è la k-ma componente di $b \in K^m$, ed il prodotto è quello righe per colonne. Analogamente la k-ma equazione di $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ si scrive come $\tilde{A}_{(k)} \cdot x = \tilde{b}_k$, dove

$$\tilde{A}_{(k)} = \begin{cases} A_{(k)}\,, & \text{se} \quad k \neq i\,, \\ A_{(i)} + cA_{(j)}\,, & \text{se} \quad k = i\,, \end{cases}$$

e

$$\tilde{b}_k = \begin{cases} b_k\,, & \text{se} \quad k \neq i\,, \\ b_i + cb_j\,, & \text{se} \quad k = i\,. \end{cases}$$

Dimostriamo ora che $A \cdot x = b$ e $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ sono equivalenti. Sia $s \in K^m$ una soluzione di $A \cdot x = b$, in particolare $A_{(k)} \cdot s = b_k$, $\forall k = 1, \dots, m$. Quindi $\tilde{A}_{(k)} \cdot s = \tilde{b}_k$, $\forall k \neq i$, e per $k = i$, $\tilde{A}_{(i)} \cdot s = (A_{(i)} + cA_{(j)}) \cdot s = A_{(i)} \cdot s + cA_{(j)} \cdot s = b_i + cb_j = \tilde{b}_i$. Ne segue che s è soluzione di $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$. Viceversa, se $s \in K^m$ è una soluzione di $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$, allora $\tilde{A}_{(k)} \cdot s = \tilde{b}_k$, $\forall k = 1, \dots, m$. Quindi $A_{(k)} \cdot s = b_k$, $\forall k \neq i$. Per $k = i$, $A_{(i)} \cdot s = (\tilde{A}_{(i)} - cA_{(j)}) \cdot s = \tilde{A}_{(i)} \cdot s - cA_{(j)} \cdot s = \tilde{b}_i - cb_j = b_i + cb_j - cb_j = b_i$. Quindi s è anche soluzione di $A \cdot x = b$ ed i due sistemi lineari sono equivalenti. $\square$

Teorema 2. *Sia dato un sistema lineare $A \cdot x = b$. È sempre possibile trasformare $A \cdot x = b$, per mezzo delle operazioni elementari, in uno ad esso equivalente, $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$, con matrice dei coefficienti $\tilde{A}$ a scala.*

Dim. Sia n l'ordine del sistema lineare, e sia m il numero delle sue equazioni. Possiamo supporre $A \neq 0$, altrimenti A è già a scala. Sia quindi $j \in \{1, \dots, n\}$ il più piccolo indice di colonna tale che $A^{(j)} \neq 0 \in K^m$, e sia $i \in \{1, \dots, m\}$ un indice di riga tale che $a_{ij} \neq 0 \in K$. Scambiando tra di loro la prima con la i-ma riga di $(A|b)$ otteniamo una matrice del tipo

$$(A'|b') = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{1j} & a'_{1,j+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & 0 & a'_{2j} & a'_{2,j+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{mj} & a'_{m,j+1} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix},$$

con $a'_{1j} = a_{ij} \neq 0$. Ora, per mezzo di una OE3, sostituiamo la seconda riga di $(A'|b')$ con $(A'|b')_{(2)} - \frac{a'_{2j}}{a'_{1j}}(A'|b')_{(1)}$. In questo modo otteniamo la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{1j} & a'_{1,j+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{2,j+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & \dots & 0 & a'_{3j} & a'_{3,j+1} & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{mj} & a'_{m,j+1} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}.$$

Ripetendo questa operazione $m-1$ volte, otteniamo una matrice con tutti gli elementi sotto a'_{1j} pari a 0:

$$(A''|b'') = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{1j} & a'_{1,j+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{2,j+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{3,j+1} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{m,j+1} & \dots & a''_{mn} & b''_m \end{pmatrix}.$$

Ora consideriamo la matrice

$$(\widehat{A''}|\widehat{b''}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{2,j+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{3,j+1} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a''_{m,j+1} & \dots & a''_{mn} & b''_m \end{pmatrix} \in M_{m-1,n+1}(K).$$

Se $\widehat{A''} = 0$, allora A'' è a scala e quindi basta porre $\tilde{A} := A''$, $\tilde{b} := b''$.
Altrimenti $\widehat{A''} \neq 0$; sia quindi $j' \in \{j+1, \dots, n\}$ il minimo indice tale che $\widehat{A''}^{(j')} \neq 0$. Sia $i \in \{2, \dots, m\}$, tale che $a''_{i,j'} \neq 0$. Ora si scambiano tra di loro la seconda e la i-ma riga di $(A''|b'')$, ottenendo una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{1j} & \dots & a'_{1,j'-1} & a'_{1j'} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a'''_{2j'} & \dots & a'''_{2n} & b'''_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a'''_{mj'} & \dots & a'''_{mn} & b'''_m \end{pmatrix}.$$

Siccome $a'''_{2j'} = a''_{ij'} \neq 0$, possiamo trasformare la precedente matrice usando ripetutamente l'OE3 in modo da fare annullare gli elementi al di sotto di $a'''_{2j'}$.
Ripetendo questo procedimento, se necessario, si ottiene una matrice $(\tilde{A}|\tilde{b}) \in M_{m,n+1}(K)$, con $\tilde{A}$ a scala. $\square$

Esempio 5. 1. Determiniamo le soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo con il metodo di Gauß,

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 & = 0 \,. \end{cases}$$

Scriviamo la matrice completa del sistema lineare,

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scambiando la prima riga con la seconda (OE1) otteniamo la matrice

$$(A'|b') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con una OE3 sostituiamo la terza riga di $(A'|b')$ con $(A'|b')_{(3)} - 2(A'|b')_{(1)}$ ed otteniamo:

$$(A''|b'') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per mezzo di una OE3 sostituiamo la quarta riga di $(A''|b'')$ con $(A''|b'')_{(4)} - 3(A''|b'')_{(1)}$ ed otteniamo la seguente matrice:

$$(A'''|b''') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora, con una OE3, sostituiamo la terza riga di $(A'''|b''')$ con $(A'''|b''')_{(3)}+(A'''|b''')_{(2)}$ ed otteniamo la matrice

$$(A^{\mathrm{IV}}|b^{\mathrm{IV}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, sempre con una OE3, sostituiamo la quarta riga di $(A^{\mathrm{IV}}|b^{\mathrm{IV}})$ con $(A^{\mathrm{IV}}|b^{\mathrm{IV}})_{(4)} + 2(A^{\mathrm{IV}}|b^{\mathrm{IV}})_{(2)}$, ottenendo

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome $\tilde{A}$ è una matrice a scala, possiamo applicare il metodo della Proposizione 1 per trovare le soluzioni di $(\tilde{A}|\tilde{b})$. In questo modo troviamo l'insieme

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} s_3 + 2s_4 \\ -2s_3 - 3s_4 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} \in K^4 \mid s_3, s_4 \in K \right\}.$$

Siccome $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ è equivalente ad $A \cdot x = b$, S è l'insieme delle soluzioni cercato.

2. Consideriamo ora il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = 2 \\ x_1 + 2x_3 & = 3\,. \end{cases}$$

Vogliamo stabilire se è compatibile e, nel caso affermativo, trovare le sue soluzioni, con il metodo di Gauß. A tal fine scriviamo la matrice completa:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trasformiamo $(A|b)$ per mezzo della OE3 che sostituisce la sua seconda riga con $(A|b)_{(2)} + (A|b)_{(1)}$, troviamo la matrice

$$(A'|b') = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ora sostituiamo la terza riga di $(A'|b')$ con $(A'|b')_{(3)} + (A'|b')_{(1)}$ ed otteniamo

$$(A''|b'') = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Infine sostituiamo $(A''|b'')_{(3)}$ con $(A''|b'')_{(3)} - \frac{4}{7}(A''|b'')_{(2)}$ ed abbiamo

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $\tilde{A}$ è a scala, con $r = 2$. Siccome $\tilde{b}_3 = \frac{16}{7} \neq 0$, il sistema lineare $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ è incompatibile, quindi anche $A \cdot x = b$ è incompatibile.