Calcolo di A^k

Modi di risposta

Es. Assegnata la matrice A

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

determinare i modi di risposta presenti in A^k

determinare i modi di risposta usando la z-Trasformata

modo di risposta $A_1 \, \lambda_1^k \cdot 1(k)$

$$A_1 = \lim_{z \to \lambda_1} \left[(z - \lambda_1)(zI - A)^{-1} \right]$$

Va determinata $(zI-A)^{-1}$

$$(zI-A) = \begin{bmatrix} (z-1) & 0 & 0 \\ 0 & (z-2) & -1 \\ 0 & 0 & (z-2) \end{bmatrix}$$

quindi

$$(zI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} & \frac{1}{(z-2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-2} \end{bmatrix}$$

il modo di risposta associato a $\lambda_1 = +1$

vale:

$$A_1 = \lim_{z \to 1} \left[(z-1)(zI - A)^{-1} \right] =$$

$$= \lim_{z \to 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z-1}{z-2} & \frac{z-1}{(z-2)^2} \\ 0 & 0 & \left(\frac{z-1}{z-2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per gli altri modi di risposta

$$A_{20} = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}\left[(z-2)^2 (zI - A)^{-1}\right] =$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} (z-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (z-2) & 1 \\ 0 & 0 & (z-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \lim_{z \to 2} \left[(z-2)^2 (zI - A)^{-1} \right]$$

$$= \lim_{z \to 2} \begin{bmatrix} \frac{(z-2)^2}{z-1} & 0 & 0 \\ 0 & (z-2) & 1 \\ 0 & 0 & (z-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e sapendo che

$p_A(\lambda) = \lambda^3$

determinare i modi di risposta di A^k

Facendo uso della Z-Trasformata

$$(zI-A)=\begin{bmatrix} z & -2 & 0 \\ -1 & z & 1 \\ 0 & -2 & z \end{bmatrix}$$

perciò $$(zI-A)^{-1}=\frac{1}{z^3}\begin{bmatrix} z^2+2 & 2z & -2 \\ +z & z^2 & -z \\ 2 & 2z & z^2-2 \end{bmatrix}$$

e per i modi di risposta si ha

$$A_{10} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 (zI - A)^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{10}\, \delta(k)$

$$A_{11} = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[z^3 (zI - A)^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \lim_{z \to 0} \left[z^3 (zI - A)^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$A_{11}\,\delta(k-1)$ $\quad$ $A_{12}\,\delta(k-2)$