Movimento libero dello stato di sistemi LTI a tempo discreto

Utilizzo della Z-trasformata

Sistemi Dinamici

a.a. 2022/2023

$\boxed{\text{Es}}$ Dato il sistema LTI a tempo discreto, di ordine 3, descritto da

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) \end{cases}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

determinare il movimento libero dello stato a partire dallo stato iniziale $x(0)$ assegnato:

$$x(k) = ?$$

In particolare quanto vale $x(3)$?

$$x(3) = ?$$

Soluzione

$$x(k) = A^k x(0)$$

forma diagonale della matrice A

utilizzo della Z-trasformata

I° modo: utilizzo della forma diagonale ...

polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$

$$p_A(\lambda) = \det\left(\lambda I_{3\times 3} - A\right) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix}$$

$= \dots$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix} =$$

sviluppo secondo la 3^a riga

$$= (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2} \cdot (-2) \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot \lambda \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \dots$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix} = \dots = 0 + 2\lambda + \lambda(\lambda^2 - 2)$$

$$= \lambda^3$$

In definitiva

$$p_A(\lambda) = \lambda^3$$

unico autovalore $\lambda_1 = 0$

molteplicità $\mu_1 = 3$

Per determinare la forma diagonale (se possibile) valuto la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$

$$\rho_1 = \operatorname{rank}(A - \lambda_1 I_3) = \operatorname{rank} A = 2$$

$$\dim \operatorname{null}(A - \lambda_1 I_3) = 1 < 3$$

$\nexists$ forma diagonale per A

II° modo: utilità della Z-Trasformata

$$A^k \Longleftrightarrow z(zI-A)^{-1}$$

$$x(k)=A^k x(0) \Longleftrightarrow X(z)=z(zI-A)^{-1}x(0)$$

$$(zI_{3\times3} - A) = \begin{bmatrix} z & -2 & 0 \\ -1 & z & +1 \\ 0 & -2 & z \end{bmatrix}$$

$$(zI_{3\times3} - A)^{-1} = \frac{1}{\det(zI_{3\times3} - A)} \cdot [C_{ij}]^T$$

$$\det(zI_{3\times3} - A) = z^3$$

← già determinato in precedenza

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} z & +1 \\ -2 & z \end{vmatrix} = (z^2 + 2)$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & +1 \\ 0 & z \end{vmatrix} = +z$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & z \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +2$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & z \end{vmatrix} = +2z$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{vmatrix} = +z^2$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} z & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +2z$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ z & +1 \end{vmatrix} = -2$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} z & 0 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} = -z$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} z & -2 \\ -1 & z \end{vmatrix} = +(z^2 - 2)$$

$$\left(z I_{3\times 3} - A\right)^{-1} = \frac{1}{z^3}\begin{bmatrix} (z^2+2) & +z & +2 \\ +2z & +z^2 & +2z \\ -2 & -z & (z^2-2) \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{z^3}\begin{bmatrix} z^2+2 & +2z & -2 \\ +z & +z^2 & -z \\ +2 & +2z & z^2-2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Z}\{A^k\} = z\left(zI_{3\times 3} - A\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{z^2}\begin{bmatrix} z^2+2 & 2z & -2 \\ z & z^2 & -z \\ 2 & 2z & z^2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \dots$$

$$\ldots = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{\tau^2} & \frac{2}{\tau} & -\frac{2}{\tau^2} \\ \frac{1}{\tau} & 1 & -\frac{1}{\tau} \\ \frac{2}{\tau^2} & \frac{2}{\tau} & 1 - \frac{2}{\tau^2} \end{bmatrix}$$

$$X(z) = z\left(z I_{3\times 3} - A\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1+\frac{2}{z^2}\right)\alpha + \frac{2}{z}\beta - \frac{2}{z^2}\gamma \\ \frac{1}{z}\alpha + \beta - \frac{1}{z}\gamma \\ \frac{2}{z^2}\alpha + \frac{2}{z}\beta + \left(1-\frac{2}{z^2}\right)\gamma \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \{\delta(k) + 2\delta(k-2)\} + 2\beta \cdot \delta(k-1) - 2\gamma \cdot \delta(k-2) \\ \alpha \cdot \delta(k-1) + \beta \cdot \delta(k) - \gamma \cdot \delta(k-1) \\ 2\alpha \cdot \delta(k-2) + 2\beta \cdot \delta(k-1) + \gamma \cdot \{\delta(k) - 2\delta(k-2)\} \end{bmatrix}$$

In particolare

$$x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \qquad x(1) = \begin{bmatrix} 2\beta \\ \alpha - \gamma \\ 2\beta \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 2\alpha - 2\gamma \\ 0 \\ 2\alpha - 2\gamma \end{bmatrix} \qquad x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k \geq 3$$