Stabilità di sistemi lineari a tempo discreto

Sistemi Dinamici

a.a. 2022-23

Es. 1 Sistema LTI autonomo

$$x(k+1) = 2\, x(k)$$

$A = 2 \leftarrow \Lambda_A = \{+2\} \quad |\lambda| > 1$

$A^k \rightarrow \infty$ sistema instabile!

Es 2

sistema LTI a tempo discreto

$$
\begin{cases}
x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} u \\
y(k) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} x(k)
\end{cases}
$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j \qquad |\lambda_{1,2}| = 1$$

sistema sempl. stabile

$$
\begin{cases}
x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} u \\
y(k) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} x(k)
\end{cases}
$$

Verificare che $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è stato di equilibrio per il sistema, con $\bar{u} = 0$

Es. Studiare la stabilità interna del sistema LTI

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

polinomio caratteristico

$$p_A(z) = \det(zI - A) = z^3 - 5z^2 + 2z + 5$$

$p_A(z) = z^3 - 5z^2 + 2z + 5$ ← NON banale da fattorizzare (ricerca di radici del polinomio per via numerica con la tecnica di bisezione per es.)

Allora non è conveniente utilizzare

- analisi degli autovalori della matrice A
- forma di Jordan della matrice A

È conveniente invece far uso della trasformazione bilineare per analizzare il nomo caratteristico

$\boxed{\text{Richiami}}$

$$z = \frac{w+1}{w-1} \qquad p(z) \longrightarrow q(w)$$

Per sostituzione nell'equazione $p(z)=0$

$$z^3 - 5z^2 + 2z + 5 = 0$$

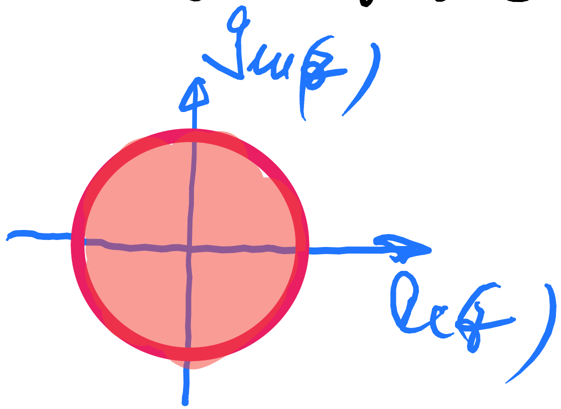
$$z = \frac{w+1}{w-1} \Longrightarrow \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 5\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 2\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 5 = 0$$

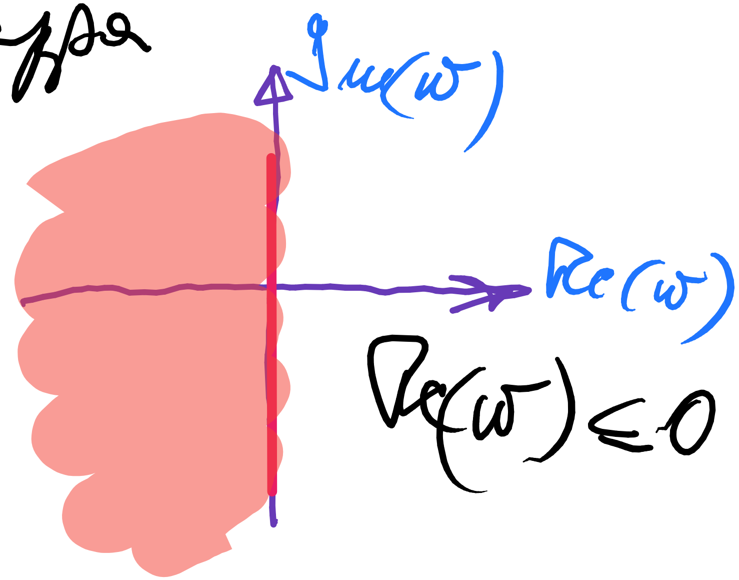
moltiplicando per $(w-1)^3$ e riordinando i vari termini si ottiene l'equazione $q(w)=0$

$$3w^3 - 19w^2 + 21w + 3 = 0$$

La trasformazione bilineare mappa

$|z| \le 1$





$\mathrm{Re}(w) \le 0$

Ora è possibile analizzare le radici di $q(w)$ [distinguendo tra radici con $\mathrm{Re}(w)<0$ e radici con $\mathrm{Re}(w)\geq 0$] per poi discutere delle radici del polinomio originario $p(z)$

Tabella di Routh-Hurwitz per q(ω)

$$q(\omega) = 3\omega^2 - 19\omega^2 + 21\omega + 3$$

+	3	3	21
−	2	−19	3
+	1	$\frac{408}{19}$	
+	0	3	

$$\frac{(-19)\cdot 21 - 9}{-19}$$

2 variazioni di segno

$\Downarrow$

2 radici di q(ω) hanno Re(ω) > 0

In definitiva

2 radici di $p(z)$ con modulo maggiore di 1

$\Downarrow$

Il sistema è instabile

$f(z) = 0 \longleftarrow$ stima numerica delle radici

$z_1 \simeq -0,77$

$z_2 \simeq +1,52$

$z_3 \simeq +4,25$

Es

Determinare gli stati d'equilibrio del sistema LTI in evoluzione libera

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$$

Per l'esistenza di stati d'equilibrio deve ammettere soluzione il sistema

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = -\bar{x}_1 \end{cases}$$

unica soluzione

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo stato di equilibrio trovato è stato stabile, as. stabile, instabile?

Il sistema LTI studiato è stabile, as. stabile oppure instabile?

1° test: autovalori della matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varphi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ +1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$p_A(\lambda)=\lambda^2+1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2}=\pm j & \text{autovalori} \\ |\lambda_{1,2}|=1 & \text{semplici} \end{cases}$$

stato d'equilibrio → semplicemente stabile

o sistema LTI ↗

La matrice A è diagonalizzabile?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = -j \qquad \Lambda_A = \{-j, +j\}$$

$$\lambda_2 = +j$$

sono complessi coniugati. Anche gli autovettori!

sono 2 autovalori distinti!

La matrice è diagonalizzabile!

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{bmatrix} +j & 1 \\ -1 & +j \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} j v_1 + v_2 = 0 \\ -v_1 + j v_2 = 0 \end{cases}$$

$v_2 = -j v_1$

$v_1 = j v_2 \quad / \cdot (-j)$

$-j v_1 = v_2$

$$\ker [\quad] = \left\langle \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A - \lambda_2 I) = \left\langle \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} +j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det T = 2j$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}5j & 0{,}5 \\ +0{,}5j & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad D_A = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & +j \end{bmatrix}$$

$A^k = ?$

Determinare i modi di risposta!