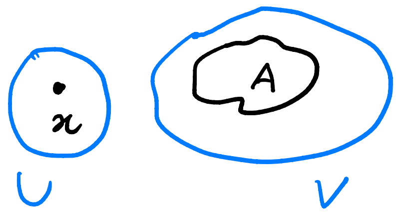
Lezione 7

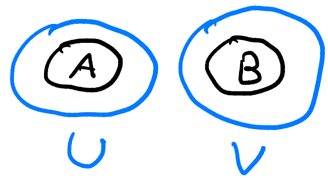
Assiomi di separazione – 2

Def Uno spazio topologico X è detto:

T_3 (o regolare) se X è T_1 e
$\forall\, A \subset X$ chiuso, $\forall\, x \in X - A$
$\exists\, U, V \subset X$ aperti disgiunti
$x \in U$ e $A \subset V$



T_4 (o normale) se X è T_1 e
$\forall\, A, B \subset X$ chiusi disgiunti
$\exists\, U, V \subset X$ aperti disgiunti t.c.
$A \subset U$ e $B \subset V$



OSS $T_4 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T_3 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T_2 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T_1$ ($T_1 \Leftrightarrow$ i punti sono chiusi)

La terminologia è controversa (alcuni autori non chiedono T_1 in T_3 e T_4) ma ampiamente accettata (Kosniowski, Munkres).

Gli esempi per $T_2 \not\Rightarrow T_3 \not\Rightarrow T_4$ li vedremo (forse) più avanti.

Teorema Metrizzabile $\Rightarrow T_4$

Dim (X,d) spazio metrico $\Rightarrow X$ è $T_2 \Rightarrow X$ è T_1

$\emptyset \neq A, B \subset X$ chiusi t.c. $A \cap B = \emptyset$

$\delta : X \to \mathbb{R}$, $\delta(x) := d(x,A) - d(x,B)$ continua

$U = \{x \in X \mid \delta(x) < 0\}$, $V = \{x \in X \mid \delta(x) > 0\}$

sono aperti e $U \cap V = \emptyset$

$x \in A \Rightarrow d(x,A) = 0$ e $d(x,B) > 0$ (B chiuso, $x \notin B$)

$\Rightarrow \delta(x) < 0 \Rightarrow x \in U$

$x \in B \Rightarrow d(x,A) > 0$ e $d(x,B) = 0$ (A chiuso, $x \notin A$)

$\Rightarrow \delta(x) > 0 \Rightarrow x \in V$

$\Rightarrow A \subset U$, $B \subset V$

Corollario $\mathbb{R}^n, S^n, B^n$ sono T_4

Teorema

1) T_3 è una proprietà topologica ereditaria

2) T_4 è una proprietà topologica.

Dim Che siano proprietà topologiche è evidente e si dimostra come per T_2 (lezione precedente).

T_3 ereditaria. X T_3, $Y \subset X$ sottospazio,

$A \subset Y$ chiuso in Y, $y \in Y - A \Rightarrow \exists\, \tilde{A} \subset X$ chiuso in X t.c.

$A = \tilde{A} \cap Y \Rightarrow y \in X - \tilde{A} \Rightarrow \exists\, \tilde{U}, \tilde{V} \subset X$ aperti t.c.

$y \in \tilde{U}$, $\tilde{A} \subset \tilde{V} \rightsquigarrow U = \tilde{U} \cap Y$, $V = \tilde{V} \cap Y$.

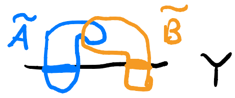
OSS In generale T_4 <u>non è ereditaria</u>:

X T_4 e $Y \subset X \not\Rightarrow Y$ T_4

Il problema è che se $A, B \subset Y$ chiusi in Y, $A \cap B = \phi$

$\Rightarrow \exists\ \tilde{A}, \tilde{B} \subset X$ chiusi t.c. $A = \tilde{A} \cap Y$, $B = \tilde{B} \cap Y$

ma <u>non</u> sappiamo se $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \phi$.



Tuttavia T_4 è <u>ereditaria sui sottospazi chiusi</u> $\boxed{E}$

T_4 è inoltre ereditaria per gli spazi metrizzabili (perché metrizzabile è ereditaria e implica T_4).

Es La retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_\ell$ ($\mathbb{R}_{[[}$) è T_4

infatti $\mathbb{R}_\ell$ è T_2 e $\forall\ \phi \neq A, B \subset \mathbb{R}_\ell$ chiusi, $A \cap B = \phi$,

si ha: $\forall\ a \in A\ \exists\ a' > a$ t.c. $[a, a'[\cap B = \phi$ ($\mathbb{R}_\ell - B$ aperto)

$\forall\ b \in B\ \exists\ b' > b$ t.c. $[b, b'[\cap A = \phi$ ($\mathbb{R}_\ell - A$ aperto)

$U = \bigcup_{a \in A} [a, a'[$, $V = \bigcup_{b \in B} [b, b'[$ aperti in $\mathbb{R}_\ell$

$A \subset U$, $B \subset V$ e inoltre $U \cap V = \phi$

infatti basta osservare che

$[a, a'[\cap [b, b'[= \phi \quad \forall\ a \in A, \forall\ b \in B$

(altrimenti $a \in [b, b'[$ o $b \in [a, a'[$ contraddizione)

Più avanti (forse) dimostreremo che $\mathbb{R}_\ell$ non è metrizzabile, quindi $T_4 \not\Rightarrow$ metrizzabile.

Assiomi di numerabilità

Def Uno spazio topologico X è detto:

I-numerabile se $\forall x \in X \ \exists \ \mathcal{J}_x = \{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base di intorni (al più) numerabile di x.

II-numerabile se X ammette una base $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (al più) numerabile.

OSS II-numerabile $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ I numerabile

Infatti $\mathcal{B}$ base numerabile di X, $x \in X \Rightarrow$
$\mathcal{J}_x = \{ B \in \mathcal{B} \mid x \in B \}$ base numerabile di intorni

Controesempio $\mathbb{R}_{dis}$.

Def Sia X uno spazio. Un sottoinsieme $D \subset X$ è **denso** in X se $D \cap U \neq \emptyset \ \forall \ \emptyset \neq U \subset X$ aperto.

OSS Se $\mathcal{B}$ è base per X, $D \subset X$ denso $\Leftrightarrow$ $D \cap B \neq \emptyset \ \forall \ \emptyset \neq B \in \mathcal{B}$.

Prop. $D \subset X$ denso $\Leftrightarrow Cl_X D = X$.

Dim $\boxed{E}$ usare caratterizzazione dei punti della chiusura.

Def Uno spazio X è separabile se X ammette un denso numerabile $D \subset X$.

Es 1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ denso numerabile $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ separabile

2) $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ denso numerabile $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ separabile

3) $\mathbb{R}_\ell$ separabile ($\mathbb{Q}$ denso)

4) X numerabile $\Rightarrow$ X separabile

Teorema Sia X uno spazio metrizzabile e separabile. Allora X è II-numerabile.

(Metrizzabile e separabile $\Rightarrow$ II-numerabile)

Dim d distanza su X che ne induce la topologia

$D \subset X$ denso numerabile

$$\mathcal{B} = \{ B_d(a; \tfrac{1}{n}) \mid a \in D, n \in \mathbb{N} - \{0\} \}$$

è una famiglia numerabile di bocce aperte centrate nei punti del denso numerabile D.

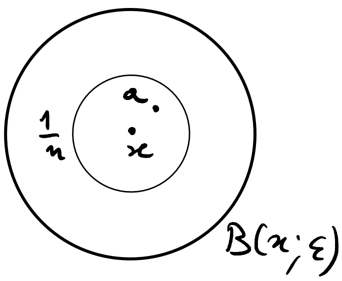
Mostriamo che $\mathcal{B}$ è base per X:

1) $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \exists\, a \in D \cap B(x; \frac{1}{n})$

$\Rightarrow x \in B(a; \frac{1}{n}) \subset B(x; \varepsilon)$

(disuguaglianza triangolare)



2) $\forall\, U \subset X$ aperto, $\forall x \in U$ $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c.

$B(x; \varepsilon) \subset U \underset{(1)}{\Longrightarrow} \exists\, a \in D$ e $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$x \in B(a; \tfrac{1}{n}) \subset B(x; \varepsilon) \subset U$$

e $B(a; \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$.

Il teorema seguente è semplice da dimostrare.

Teorema I-numerabile e II-numerabile sono proprietà topologiche ereditarie.

Dim $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ omeo manda basi (di intorni) in basi (di intorni) $\Rightarrow$ proprietà topologiche

II-numerabile ereditaria: $\mathcal{B}$ base numerabile di X

$Y \subset X$ sottospazio $\Rightarrow \mathcal{B}_Y := \{ B \cap Y \mid B \in \mathcal{B} \}$

base numerabile per Y.

I-numerabile ereditaria: argomento simile.

Prop. II-numerabile $\Rightarrow$ separabile

Dim X II-numerabile, $\mathcal{B} = \{ B_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ base num.

Possiamo assumere $B_n \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$

Assioma delle scelte $\leadsto a_n \in B_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$D = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subset X$ denso: $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto

$\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \in B_n \subset U$.

Corollario $\mathbb{R}^n, S^n, B^n$ sono II-numerabili (e separabili).